

CINEMATICA DEL PUNTO MATERIALE (1D)

Si basa tutto sullo studio veicolare a una traiettoria, anche utilizzando diagrammi orari e grafici qualitativi.

Definiamo così nuove grandezze utili a tale scopo, chiamiamo

- "S" lo spostamento, ovvero la posizione del punto materiale:
diventa "S(t)" quando questa è veicolare in funzione del tempo.
- "V" la velocità [m/s], diventa V(t) in funzione di t-tempo,
la velocità media e istantanea saranno rispettivamente:

$$\bar{V} = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = [\text{m/s}] ; \quad v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \frac{dS(t)}{dt}$$

- "a" l'accelerazione [m/s²], diventa a(t) in funzione del tempo,
Si divide in istantanea e media, rispettivamente:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t} = \frac{dV(t)}{dt} = \frac{d^2S(t)}{dt^2} ; \quad \bar{a} = \frac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t}$$

MOTO RETILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

Consideriamo $a = \text{costante}$ e costruiamo la LEGGE ORARIA:

$$\left\{ \begin{array}{l} a(t) = \text{costante} \\ v(t) = v(0) + at \\ s(t) = s(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2 \end{array} \right.$$

"0" indica \rightarrow "all'istante di Tempo = 0", quindi velocità iniziale

Ergo diventa $s(t) = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$

Moto RETILINEO UNIFORME

In questo caso $a(t) = 0 = \text{costante}$ e le legge ormai diventa

$$\begin{cases} a(t) = 0 \\ v(t) = v_0 + at \\ s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(t) = 0 \\ v(t) = v_0 \\ s(t) = s_0 + v_0 t \end{cases}$$

Moto CIRCOLARE

Univocamente possiamo definire

$$\phi(t) = \frac{s(t)}{R} \quad \text{con } \rightarrow$$

Quindi $s(t) = R \cdot \phi(t)$ e le diverse formule, dopo diversi passaggi e calcoli, diventeranno

$$s(t) = R \cdot \phi(t)$$

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = R \cdot \omega(t) \Leftrightarrow \omega(t) = v(t)/R$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = R \cdot \alpha(t) \Leftrightarrow \alpha(t) = a(t)/R$$

Queste nuove grandezze saranno

R = raggio ; $\omega(t)$ = velocità angolare ; $\alpha(t)$ = accelerazione angolare

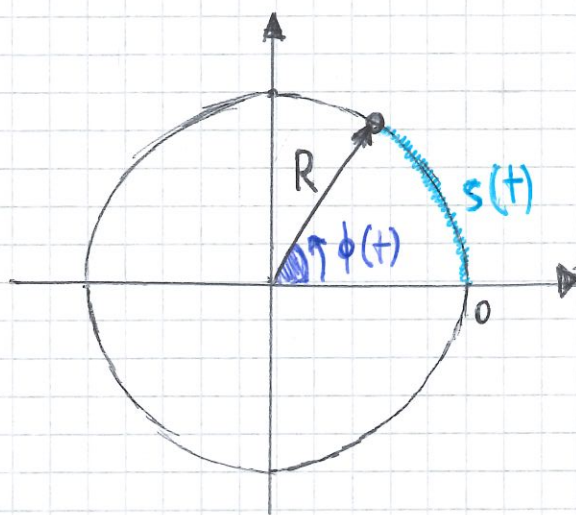
Il tutto dipende dall'angolo ("phi") in funzione del tempo: $\phi(t)$

In analisi dimensionale otteniamo:

$$\phi = [\text{rad}] = [\text{adimensionali}]$$

$$\omega = v/R = [\text{m/s}] / [\text{m}] = [\text{s}^{-1}]$$

$$\alpha = a/R = [\text{m/s}^2] / [\text{m}] = [\text{s}^{-2}]$$



Moto CIRCOLARE UNIFORME E UNIFORMEMENTE ACCELERATO

La legge oraria standard si ottiene quindi

$$\begin{cases} \alpha(t) = \text{costante} \\ \omega(t) = \omega_0 + \alpha t \\ \phi(t) = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \end{cases}$$

Mentre nel caso di $\alpha(t) = 0$ si trasforma in

$$\begin{cases} \alpha(t) = 0 \\ \omega(t) = \omega_0 \\ \phi(t) = \phi_0 + \omega_0 t \end{cases}$$

Moto Vario o Moto Armonico

Il moto ARMONICO è il moto vario descritto da un oscillatore armonico e la proiezione lungo una retta del moto di un altro punto che si muove di moto circolare uniforme.

- Consideriamo $s(t) = A \sin(\omega_0 t + B)$ $\left\{ = A \cos(\omega_0 t + B) \right\}$ dove
- ω_0 è la pulsazione naturale, essa viene indicata con "omega 0" come la velocità angolare poiché dimensionalmente omogenee, ma non sono da confondere $[= \text{rad/s}] = [= \text{s}^{-1}]$
 - A è l'ampiezza dell'oscillazione $[= \text{m}]$
 - B è la fase dell'oscillazione $[= \text{rad}] = [= \text{adimensionale}]$

Calcoliamo gli altri valori di grandezze

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = A \omega_0 \cos(\omega_0 t + B)$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + B) = -\omega_0^2 s(t)$$

Perché conosciamo * otteniamo

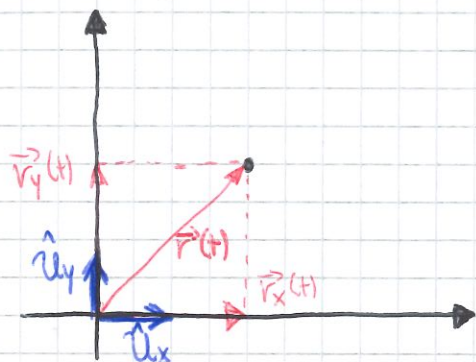
CINEMATICA DEL PUNTO MATERIALE (2D)

RAPPRESENTAZIONE DEI VETTORI

Si possono usare due sistemi di riferimento distinti:

- COORDINATE CARTESIANE ①
- COORDINATE POLARI ②

①



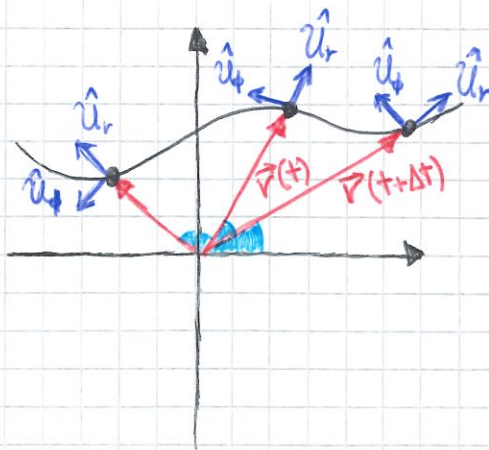
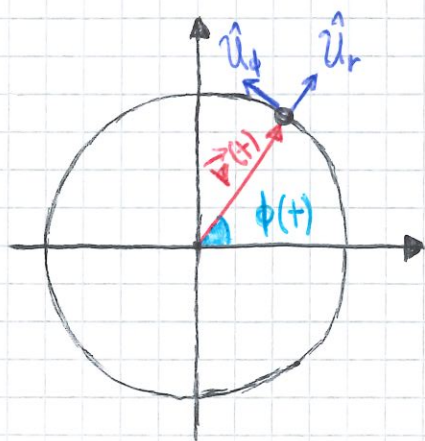
Distinguiamo un vettore dal suo modulo, ad esempio, il vettore posizione

$$" \vec{r}(t) \rightarrow |\vec{r}(t)| = r(t) \rightarrow \vec{r}(t) = r(t) \cdot \hat{u} "$$

Pertanto avremo che il modulo di un vettore sarà il vettore stesso privato del versore che ne indica la direzione e, al contrario, un vettore sarà uguale e si otterrà dal modulo dello stesso moltiplicato per il versore direzione.

- Vettore spostamento/posizione: $\vec{r}(t) = r_x(t) \cdot \hat{u}_x + r_y(t) \cdot \hat{u}_y$
- Vettore velocità: $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dots = v_x(t) \cdot \hat{u}_x + v_y(t) \cdot \hat{u}_y$
- Vettore accelerazione: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dots = a_x(t) \cdot \hat{u}_x + a_y(t) \cdot \hat{u}_y$

②



In entrambe le rappresentazioni avremo gli stessi versori relativi al sistema di riferimento a coordinate polari

$$\begin{cases} \hat{U}_r & \text{Versore RADIALE} \\ \hat{U}_\phi & \text{Versore TRASVERSO} \end{cases}$$

A sua volta, questo sistema di riferimento possederà le proprie

formule per le relative grandezze fisiche studiate:

$$- \vec{r}(t) = r(t) \cdot \hat{U}_r(\phi(t))$$

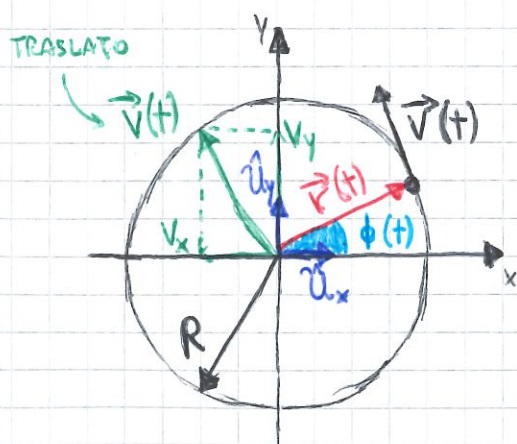
$$- \vec{v}(t) = \underbrace{\frac{dr(t)}{dt} \cdot \hat{U}_r(t)}_{\text{VELOCITÀ RADIALE}} + \underbrace{r(t) \cdot \omega(t) \cdot \hat{U}_\phi(t)}_{\text{COMPONENTE TRASVERSA}}$$

Il versore \hat{U}_r risulta in funzione di $\phi(t)$ poiché al variare dell'angolo si modificherà anche la relativa direzione del vettore $\vec{r}(t)$ e quindi si scrive " $\hat{U}_r(\phi(t))$ "

$$- \vec{a}(t) = \underbrace{\left[\frac{d^2 r(t)}{dt^2} - r(t) \omega^2(t) \right] \hat{U}_r(t)}_{\text{ACCELERAZIONE RADIALE}} + \underbrace{\left[2 \frac{dr(t)}{dt} \omega(t) + r(t) \alpha(t) \right] \hat{U}_\phi(t)}_{\text{ACCELERAZIONE TRASVERSALE}}$$

Ora che abbiamo stabilito i due sistemi di riferimento (S.R.) possiamo studiare il moto circolare in entrambi i casi

① MOTO CIRCOLARE CARTESIANO



Definiamo le diverse grandezze a partire dalla base:

$$\vec{r}(t) = r_x(t) \cdot \hat{U}_x + r_y(t) \cdot \hat{U}_y \quad \text{con}$$

$$\begin{cases} r_x(t) = R \cdot \cos(\phi(t)) \\ r_y(t) = R \cdot \sin(\phi(t)) \end{cases}$$

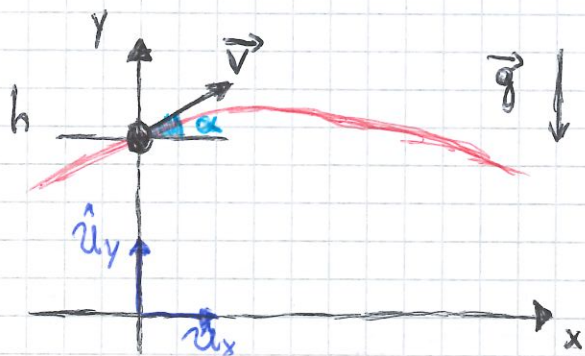
$$\vec{v}(t) = v_x(t) \cdot \hat{U}_x + v_y(t) \cdot \hat{U}_y$$

$$\begin{cases} v_x(t) = \frac{dr_x(t)}{dt} = -R \omega(t) \sin(\phi(t)) \\ v_y(t) = \frac{dr_y(t)}{dt} = R \omega(t) \cos(\phi(t)) \end{cases}$$

$$\vec{a}(t) = a_x(t) \cdot \hat{u}_x + a_y(t) \cdot \hat{u}_y$$

$$\begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = -R [\alpha(t) \sin(\phi(t)) + \omega^2(t) \cos(\phi(t))] \\ a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = R [\alpha(t) \cos(\phi(t)) - \omega^2(t) \sin(\phi(t))] \end{cases}$$

① Moto PARABOLICO CARTESIANO



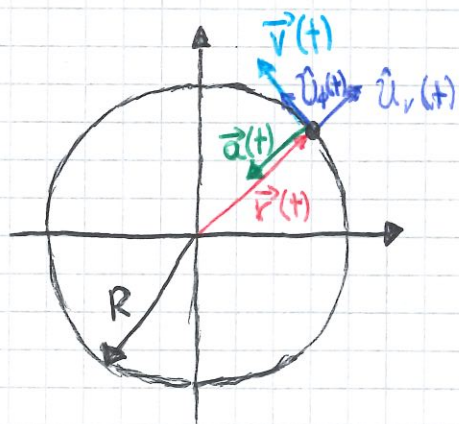
Considerando il sistema di riferimento possiamo considerare la forza di gravità "g" negativa con

$$\vec{g} = g_x \hat{u}_x + g_y \hat{u}_y = g_y \hat{u}_y$$

La legge oraria del moto in funzione del tempo diventerà:

$$\begin{aligned} x: & \begin{cases} r_x(t) = v_{0x} + v_{0x} \cdot t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ r_y(t) = v_{0y} + v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} a_y t^2 \end{cases} \end{aligned}$$

② Moto CIRCOLARE POLARE



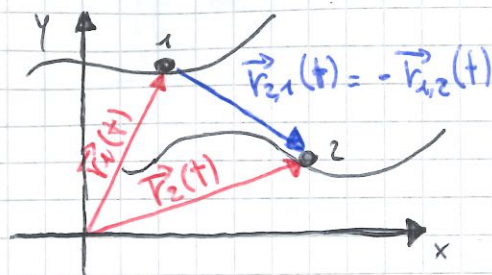
Consideriamo $\vec{r}(t) \equiv R = \text{costante}$, avremo

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = R \cdot \hat{u}_r(t) \\ \vec{v}(t) = R \omega(t) \hat{u}_\phi(t) \\ \vec{a}(t) = -R \omega^2(t) \hat{u}_r(t) + R \alpha(t) \hat{u}_\phi(t) \end{cases}$$

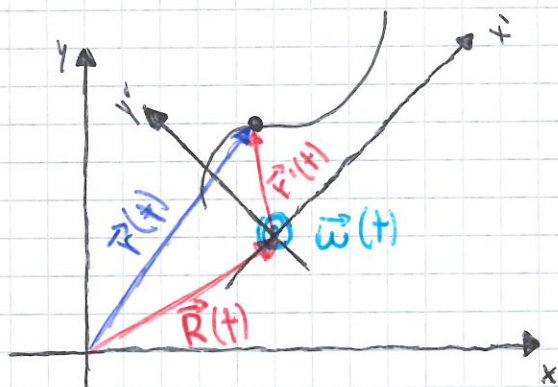
Nel moto circolare uniforme $\alpha(t) = 0$ pertanto $\vec{a}(t) = -R \omega^2(t) \hat{u}_r(t)$: l'accelerazione angolare "α", quando presente, fa variare l'angolarità dell'accelerazione "a" (modificando la perpendicolarità rispetto alla velocità "v(t)" inclinandola).

CINEMATICA RELATIVA

I moti relativi sono moti effettuati relativamente a un sistema di riferimento scelto. La loro importanza riguarda la corretta applicazione delle leggi della Cinematica e della Dinamica rispetto al sistema di riferimento considerato.



$$\begin{cases} \vec{r}_{2,1}(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t) \\ \vec{v}_{2,1}(t) = \vec{v}_2(t) - \vec{v}_1(t) \\ \vec{a}_{2,1}(t) = \vec{a}_2(t) - \vec{a}_1(t) \end{cases}$$



Considerando 2 distinti S.R. abbiamo

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{R}(t)$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{\omega}(t) \cdot \vec{r}'(t) + \vec{V}(t)$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}'(t) + \underbrace{2 \vec{\omega}(t) \cdot \vec{v}'(t)}_{\text{ACCELERAZIONE DI CORIOLIS}} + \underbrace{\vec{a}(t) \cdot \vec{r}'(t)}_{\text{ACCELERAZIONE DI EULERO}} + \underbrace{\vec{\omega}(t) \cdot \vec{\omega}(t) \cdot \vec{R}'(t)}_{\text{ACCELERAZIONE CENTRIFUGA}} + \vec{A}(t)$$

ACCELERAZIONE DI CORIOLIS

ACCELERAZIONE DI EULERO

ACCELERAZIONE CENTRIFUGA

Se il sistema di riferimento "x'y'" si muove solo di moto TRASLATORIO ($\omega(t)=0$)

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{R}(t) \\ \vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{V}(t) \\ \vec{a}(t) = \vec{a}'(t) + \vec{A}(t) \end{cases}$$

Se poi "x'y'" si muove di moto TRASLATORIO UNIFORME ($\vec{A}(t)=0 \rightarrow V=\text{costante}$)

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{R}(t) \\ \vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{V}_0 \\ \vec{a}(t) = \vec{a}'(t) \end{cases}$$

TRASFORMAZIONI DI GALILEO

DINAMICA DI UN PUNTO MATERIALE

Introduciamo una nuova grandezza fisica: la Forza. Rappresenta l'interazione tra due oggetti dalla quale deriva. Si misura in

- dinamica

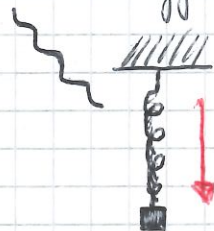
- statica

la proprietà di una forza di DEFORMARE un oggetto

CLASSIFICAZIONE DELLE FORZE:

- gravitazionale
- elettromagnetica
- nucleare forte
- nucleare debole

La forza è una grandezza VETTORIALE:



DINAMOMETRO

■ PRINCIPIO DI RELATIVITÀ GALILEIANA

Le leggi della fisica sono INVARIANTI rispetto alle trasformazioni di Galileo

$$\begin{cases} x(t) = x'(t) + V \cdot t \\ y(t) = y'(t) \\ z(t) = z'(t) \end{cases}$$

Sistema di riferimento "x'y'" in moto TRASLATORIO RETILINEO E UNIFORME rispetto al sistema di riferimento "xy"

■ PRINCIPIO DI INERZIA

Ciascun corpo libero persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

Il termine "libero" si riferisce all'assenza di forze agenti sul corpo o alla risultante di esse nulla. Inoltre si dice inerziale un sistema di riferimento in cui vale il principio di INERZIA, pertanto lo saranno anche tutti quelli che vi si muovono rispettivamente di moto traslatorio rettilineo ed uniforme.

SISTEMA DI RIFERIMENTO:

"Stelle fisse"

↳ inerziale

"Terra"

↳ non inerziale

■ SECONDO PRINCIPIO DELLA DINAMICA

Se un sistema di riferimento INERZIALE l'accelerazione di un punto materiale è direttamente proporzionale alla forza che agisce su di esso:

$$\vec{a} = \frac{\vec{f}}{m} \iff \vec{f} = m\vec{a}$$

Il secondo principio della dinamica implica il primo. In condizioni particolari si avrà

$$\vec{f} = 0 \iff \vec{a} = 0 \iff \vec{v} = \text{costante}$$

■ PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE

Ad ogni forza (azione) corrisponde una forza (reazione) UGUALE E CONTRARIA.
Definiamo una nuova grandezza fisica e riscriviamo il II° principio:

$$\vec{q}(t) = m \vec{v}(t) \rightarrow \text{Quantità di moto}$$

Se deriviamo questa espressione ricaviamo la forza

$$\vec{f}(t) = \frac{d\vec{q}(t)}{dt} = m\vec{a}(t) \iff d\vec{q}(t) = \vec{f}(t) dt$$

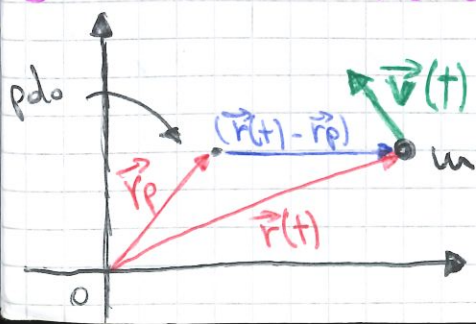
Perciò possiamo fissare il **TEOREMA DELL'IMPULSO**

$$\Delta \vec{q}(t) = \vec{q}(t + \Delta t) - \vec{q}(t) = \int_t^{t+\Delta t} \vec{f}(t) dt$$

che, quando $\vec{f}(t) = \text{costante}$ diventerà

$$\Delta \vec{q}(t) = \vec{f} \cdot \Delta t$$

■ MOMENTO ANGOLARE O MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO



$$\text{Otteniamo: } \vec{q}(t) = m\vec{v}(t), \\ \vec{L}_p = (\vec{r}(t) - \vec{r}_p) \cdot \vec{q}(t) \xrightarrow{r_p=0} \vec{L}_p = \vec{r}(t) \cdot \vec{q}(t)$$

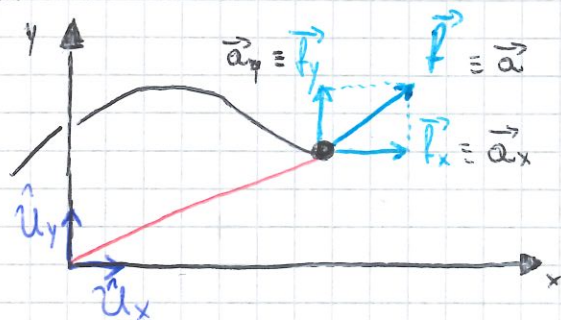
Azione Dinamica delle Forze

Per il II° principio della dinamica sappiamo

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow [F] = [m] \cdot [a] = [kg] [m/s^2] = [N]$$

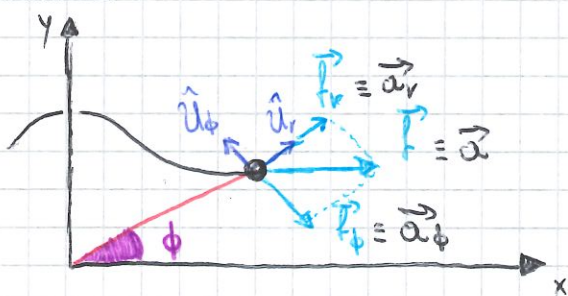
Abbiamo due comportamenti distinti in base al s.r. fissato

- CARTESIANO



$$\begin{cases} F_x = m a_x \\ F_y = m a_y \end{cases}$$

- POLARE



$$\begin{cases} \vec{F}_r(t) = m \vec{a}_r(t) \\ \vec{F}_\phi(t) = m \vec{a}_\phi(t) \end{cases}$$

Forze Notevoli

Forza Peso

È una forza dipendente da massa e accelerazione, sulla Terra derivata da

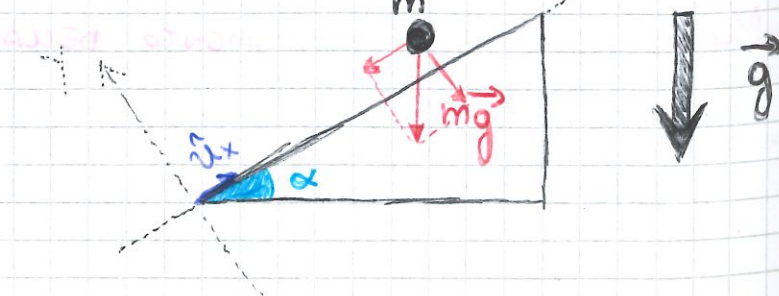
$$\vec{P} = -\gamma \frac{m \cdot M}{R^2} \hat{u}_r = m \vec{g} \quad \text{con} \quad g = \gamma \frac{M}{R^2} \approx 9,81 \text{ m/s}^2$$

La nostra "g" verrà chiamata accelerazione di gravità.

ESEMPIO: Piano inclinato

Vale il II° princ. della dinamica quindi:

$$\vec{F} = m \vec{a}$$



$$x: -mg \sin \alpha = m a_x$$

$$: a_x = -g \sin \alpha$$

▲ REAZIONI VINCOLARI

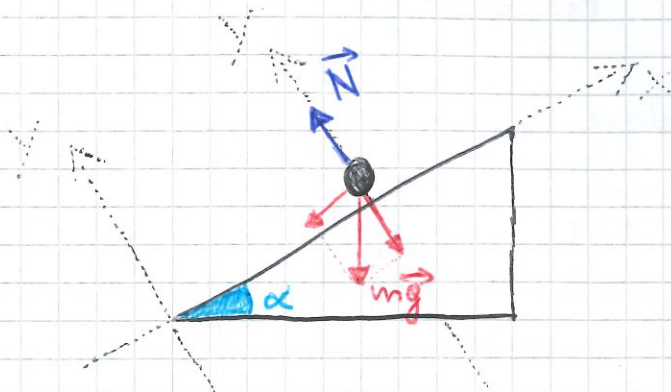
Sono forze che non possono produrre moto ma che possono opporsi ad esso. Si indica con "N" e a priori non si può dire quanto essa valga, perché dipende dal problema fisico studiato. In generale si può dire che $0 \leq N \leq N_{\max}$ dove N_{\max} = carico di rottura.

ESEMPPIO: Piano inclinato

$$\vec{f} = m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$$

$$x: -mg \sin \alpha + 0 = m a_x$$

$$y: -mg \cos \alpha + N = m a_y = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha$$



▲ ATTRITO

Questa non è una forza attiva, non può produrre moto; si distinguono:

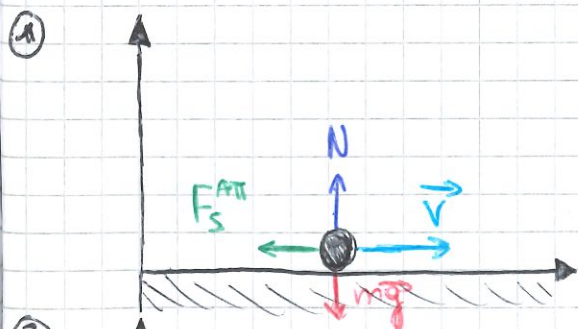
① Attrito Statico

$$0 \leq F_s^{\text{Att.}} \leq F_{s,\max}^{\text{Att.}} = \mu_s N$$

② Attrito Dinamico

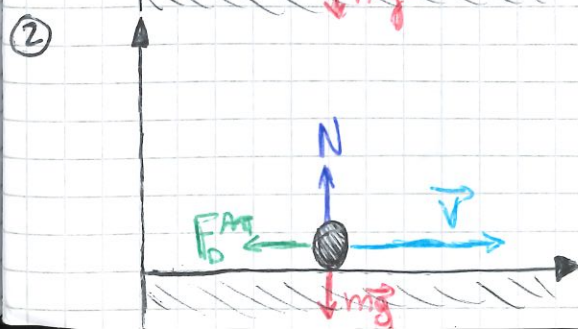
$$F_D^{\text{Att.}} = \mu_D N$$

In entrambe le formule osserviamo μ_s e μ_D , questi si chiamano coefficienti di attrito statico/dinamico e sono numeri puri ($0 \leq x \leq 1$)



$$\vec{f} = m\vec{g} + \vec{v} + \vec{N} + \vec{F}_s^{\text{Att.}} = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} F_s^{\text{Att.}} = v \\ N = mg \end{cases}$$



$$\vec{f} = m\vec{g} + \vec{v} + \vec{N} + \vec{F}_s^{\text{Att.}} = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} F_D^{\text{Att.}} = v \\ N = mg \end{cases}$$

ESEMPIO: Piano inclinato scabro

① CASO STATICO

$$\vec{f} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_s^{\text{ATI}} = m\vec{a}$$

Dobbiamo avere una situazione statica del tipo

$$F_s^{\text{ATI}} = mg \sin \alpha \leq \mu_s N = \mu_s mg \cos \alpha$$

Il valore minimo in cui ci si trova in questa condizione?

$$mg \sin \alpha = \mu_{s,\min} \cdot mg \cos \alpha \rightarrow \mu_{s,\min} = \tan \alpha$$

② CASO DINAMICO

$$\vec{f} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_D^{\text{ATI}} = m\vec{a}$$

Avremo una situazione dinamica del tipo

$$\mu_s < \mu_{s,\min} = \tan \alpha$$

Pertanto tramite un sistema si troverà

$$\begin{aligned} x: & \begin{cases} -mg \sin \alpha + \vec{F}_D^{\text{ATI}} (\mu_0 N) = m\vec{a}_x \\ y: & \begin{cases} -mg \cos \alpha + N = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow a_x = g(\mu_0 \cos \alpha - \sin \alpha) \end{aligned}$$

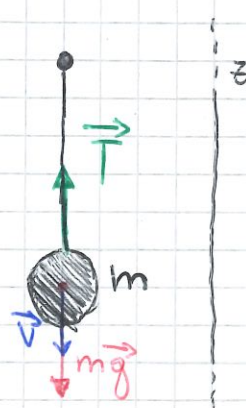
▲ TENSIONE DI UNA FUNG

La tensione è una forza passiva, cioè vincola il moto di un oggetto ed è tipicamente l'incognita del problema fisico: $0 \leq T \leq T_{\max}$ dove T_{\max} è il carico di rottura

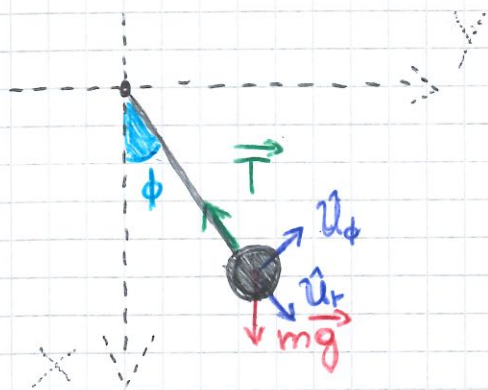
$$\vec{f} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{v} = m\vec{a}$$

$$z: -mg + T - v = ma = 0$$

$$! \quad T = mg + v$$



ESEMPIO: Pendolo



$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$$

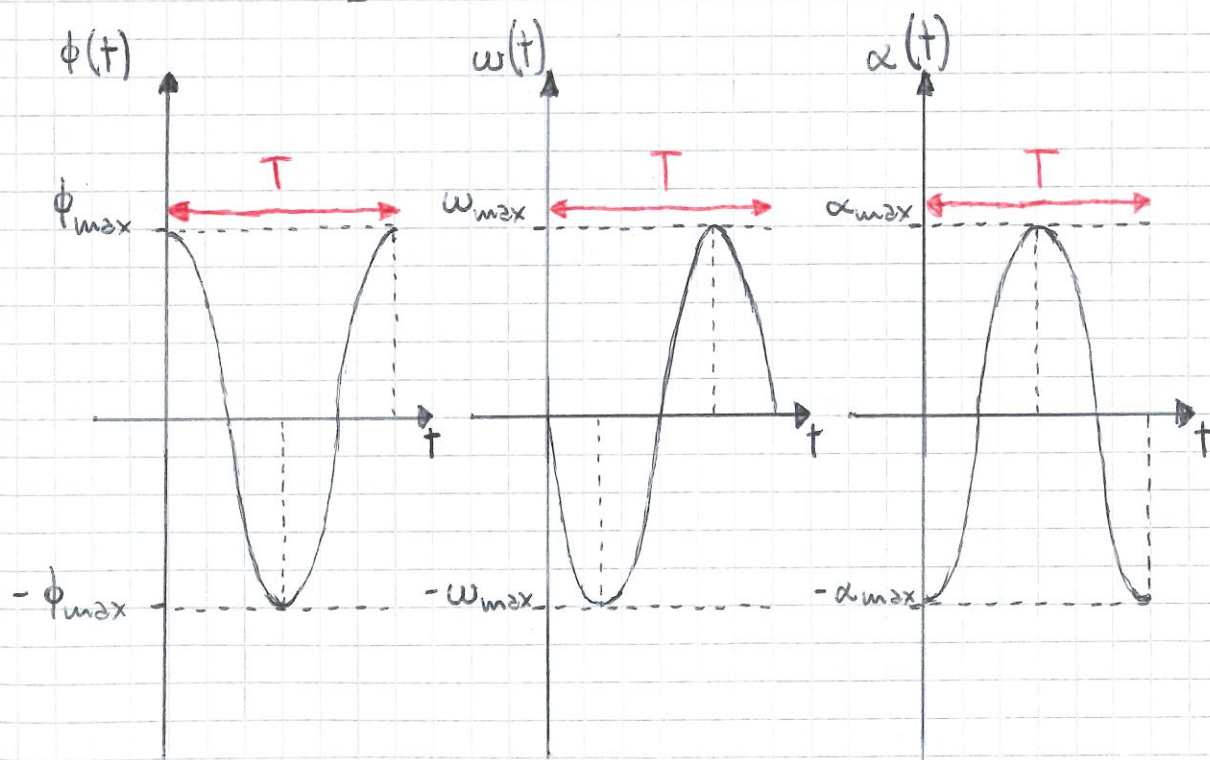
$$\begin{cases} r: & mg\cos(\phi) - T = (ma_r) = -mL\omega^2 \\ \phi: & -mg\sin(\phi) = (ma_\phi) = mL\alpha \end{cases}$$

Nel limite di piccole oscillazioni, conoscendo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, possiamo approssimare $\sin(\phi) \approx \phi$ in funzione del tempo, perciò avremo:

$$\phi: \quad \alpha = \left(\frac{d^2 \phi(t)}{dt^2} \right) = -\frac{g}{L} \sin(\phi(t)) \approx -\omega_0^2 \phi(t)$$

Ricavando " α " notiamo subito come la precedente assomigli, ed eguagli, l'equazione dell'accelerazione nel moto armonico, perciò otterremo la seguente uguaglianza

$$-\omega_0^2 = -\frac{g}{L} \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{che ci porta a}$$



In questi grafici si può osservare il moto armonico del pendolo in relazione ad un PERIODO DI OSCILLAZIONE: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

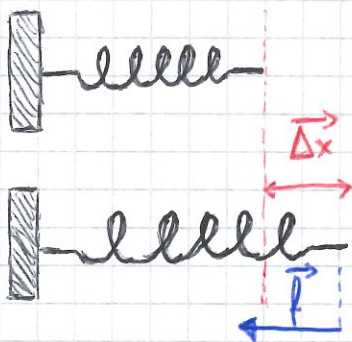
▲ Forza Elastica

Nel regime di deformazione elastica di qualunque oggetto/materiale, definito come "molla", la forza è proporzionale al suo allungamento. Scriviamo così la Legge di Hooke:

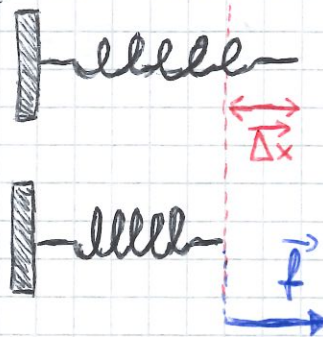
$$\vec{f} = -k \cdot \vec{\Delta x} \quad \text{con} \quad [k] = \frac{[N]}{[m]} = \text{costante}$$

dove "k" = coefficiente elastico e " $\vec{\Delta x}$ " = deformazione della molla. La rappresentazione grafica può considerarsi come

① ALLUNGAMENTO



② COMPRESSIONE



ESEMPIO:

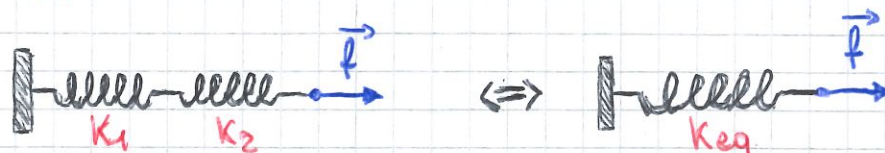
$$\vec{f} = -k \cdot \vec{\Delta x} = m \vec{a} :$$

$$x: -k x(t) = m a_x = m \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

$$\rightarrow \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m} x(t) = -\omega_0^2 x(t) \quad \text{"a" moto ARMONICO}$$

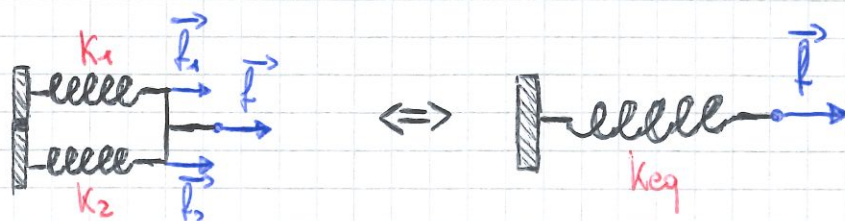
CONNESSIONI DI MOLLE:

• IN SERIE



$$\vec{f} = k_{eq} \vec{\Delta x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}$$

• IN PARALLELO



$$\vec{f} = k_{eq} \vec{\Delta x} \quad \Leftrightarrow \quad k_{eq} = k_1 + k_2 + \dots + k_n = \sum_{i=1}^n k_i$$

DINAMICA NEI SISTEMI DI RIFERIMENTO NON INERZIALI (SRNI)

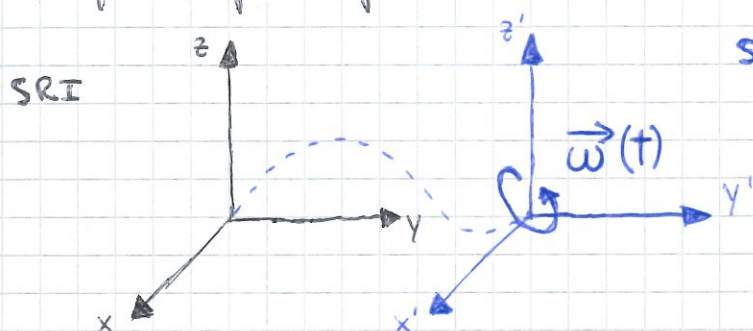
Per i sistemi di riferimento inerziali (SRI) si utilizza la cosiddetta legge di Newton o II° principio della dinamica

$$\vec{F} = \dots = m\vec{a}$$

dove " \vec{F} " è la risultante di tutte le forze che agiscono su un punto materiale. All'interno dei " \dots " vi rientrano:

Attrito, Forza peso, Reazioni vincolari, Forze elastiche e tensioni

A questo punto possiamo considerare due sistemi di riferimento



SRNI è un sistema di riferimento che NON è in moto traslatorio rettilineo e uniforme rispetto al SRI

In un SRNI NON vale il principio di inerzia.

Possiamo trovare le diverse grandezze dovute dall'interazione dei due:

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{R}'(t) + \vec{R}(t) \\ \vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{R}'(t) + \vec{V}(t) \\ \vec{a}(t) = \vec{a}'(t) + \underbrace{2\vec{\omega}(t) \times \vec{v}'(t)}_{\text{acc. di CORIOLIS}} + \underbrace{\vec{\alpha}(t) \times \vec{R}'(t)}_{\text{acc. di EULERO}} + \underbrace{\vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{R}'(t))}_{\text{acc. CENTRIFUGA}} + \vec{A}(t) \end{cases}$$

acc. nel SRI

acc. di CORIOLIS

acc. CENTRIFUGA

acc. nel SRNI

acc. di EULERO

acc. di SRNI rispetto a SRI

Inoltre, se alle accelerazioni si moltiplica una massa, si ottengono le relative forze, chiamate APPARENTI. Queste forze non corrispondono a nessuna interazione fisica del punto materiale con un altro oggetto.

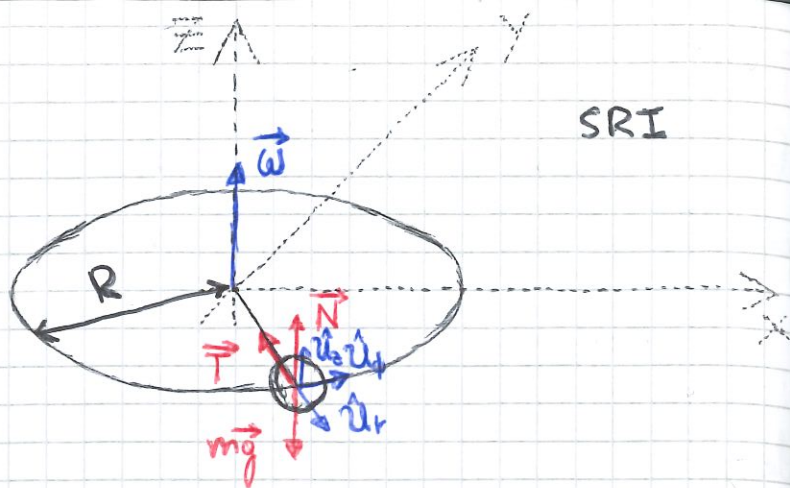
ESSEMPI 3

SRI: $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} = m\vec{a}$

r: $T = mR\omega^2$

ϕ : $0 = 0$

z: $N = mg$



SRNI:

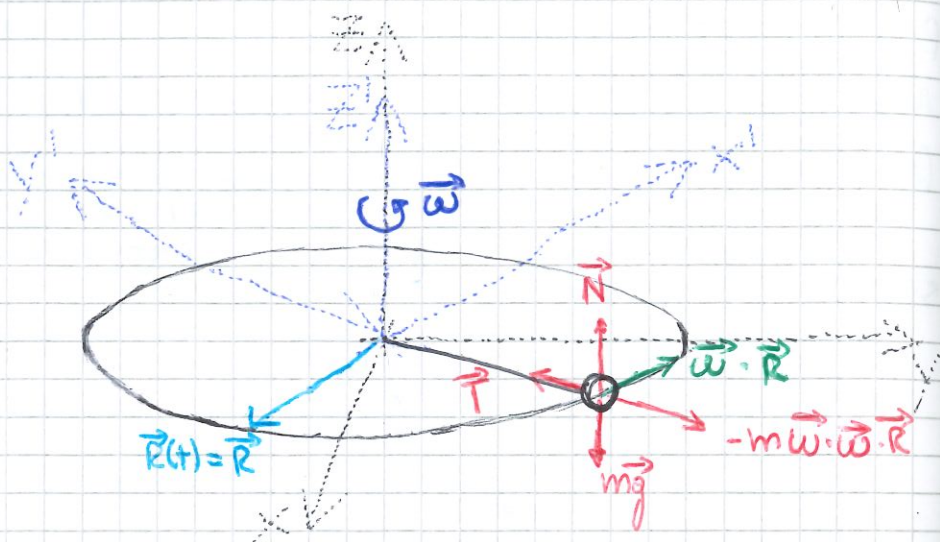
$\vec{F} - m\vec{\omega} \cdot \vec{\omega} \cdot \vec{R} = m\vec{a}' = 0$

$\Rightarrow m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} - m\vec{\omega} \cdot \vec{\omega} \cdot \vec{R} = 0$

r: $T = mR\omega^2$

ϕ : $0 = 0$

z: $N = mg$



LAVORO ED ENERGIA

Per iniziare questo capitolo bisogna passare prima da alcune specifiche

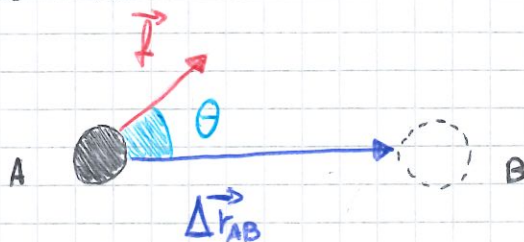
- LAVORO: le trasformazioni di energia da una forma ad un'altra
- ENERGIA: la capacità di un oggetto di compiere lavoro

Secondo il PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA, essa, non si crea e non si distrugge ma si trasforma.

Il lavoro di una forza costante è definito come

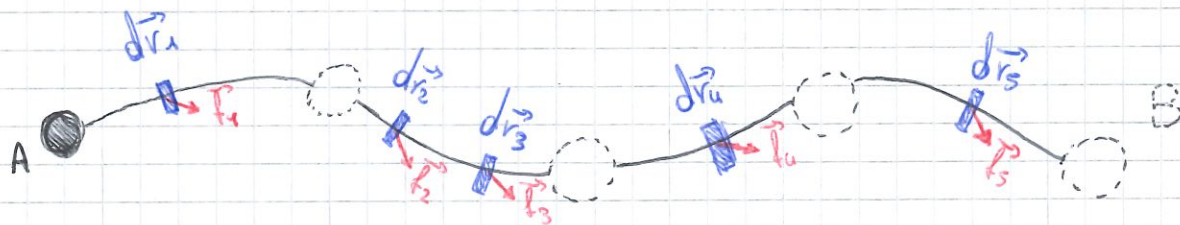
$$L_{AB} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}_{AB}$$

$$[J] = [N] \cdot [m]$$



Più precisamente avremo la seguente

$$L_{AB} = F \cdot \Delta r_{AB} \cdot \cos \theta \quad \left\{ \begin{array}{ll} L_{AB} > 0 & \text{se } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad \text{MOTORE} \\ L_{AB} = 0 & \text{se } \theta = \frac{\pi}{2} \\ L_{AB} < 0 & \text{se } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \quad \text{RESISTENTE} \end{array} \right.$$



Consideriamo $F = F_1 = F_2 = \dots = \text{costante}$ e $\Delta \vec{r}_{AB} = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2 + \dots + d\vec{r}_n$, avremo

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \rightarrow L_{AB} = \vec{F} \int_A^B d\vec{r} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}_{AB}$$

Dopo aver definito il lavoro possiamo introdurre una nuova grandezza dipendente dal tempo: LA POTENZA

$$W = \frac{L_{AB}}{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad [W] = \frac{[L]}{[t]} = \frac{[J]}{[s]} = [W] = [\text{Watt}]$$

La potenza istantanea sarà

$$W(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{L_{AB}}{\Delta t} = \frac{dL_{AB}}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

■ ENERGIA CINETICA

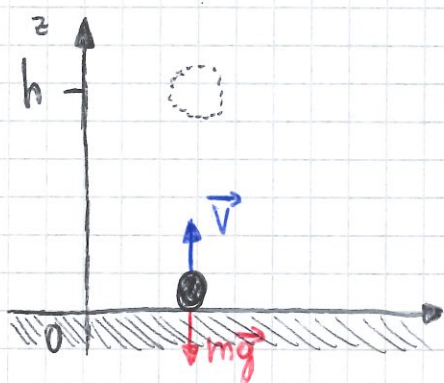
Calcoliamo il lavoro della risultante di tutte le forze agenti, in un punto materiale in un sistema di riferimento INERZIALE.

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = \frac{1}{2} m v^2$$

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

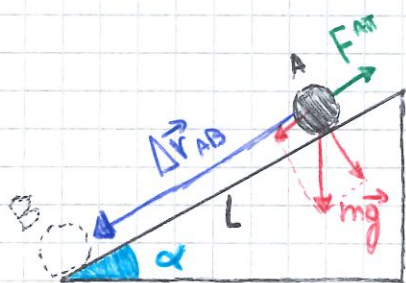
$$L_{AB} = \Delta K_{AB} = K_B - K_A \quad \text{dove } [K] = [L] = [J]$$

ESEMP1:



$$\begin{cases} L_{oh} = -L_{ho} = \int_h^0 -mg dz = -mgh \\ L_{oh} = \frac{1}{2} m v_h^2 + \left(-\frac{1}{2} m v_o^2\right) = -\frac{1}{2} m v_o^2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} m v_o^2 = mgh \rightarrow h = \frac{v_o^2}{2g}$$



$$\begin{cases} L_{TOT} = L_{AB}^{AT} + L_{AB}^{PESO} = \vec{F}_{AT} \cdot \Delta \vec{r}_{AB} + m\vec{g} \cdot \Delta \vec{r}_{AB} = \\ = -\mu_0 mg \cos \alpha + mg \sin \alpha L = mgL(\sin \alpha - \mu_0 \cos \alpha) \\ L_{TOT} = \Delta K_{AB} = K_B - K_A = \dots = \frac{1}{2} m v_B^2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = mgL(\sin \alpha - \mu_0 \cos \alpha) \Rightarrow v_B = \sqrt{2gL(\sin \alpha - \mu_0 \cos \alpha)}$$

■ FORZE CONSERVATIVE E NON CONSERVATIVE

Consideriamo una generica forza \vec{F} che agisce su un punto materiale da A a B. Allora la forza si dice conservativa se il lavoro da un estremo all'altro non dipende dalla traiettoria ① oppure se la circuitazione è nulla ②:

$$\textcircled{1} L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{oppure} \quad \textcircled{2} \oint_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

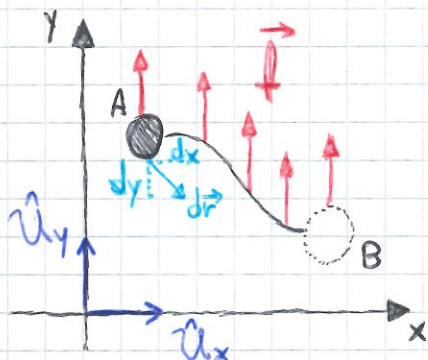
ENERGIA POTENZIALE

Dalla precedente ① possiamo introdurre una nuova grandezza fisica chiamata ENERGIA POTENZIALE definita come

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - [U(\vec{r}_B) - U(\vec{r}_A)] = - \Delta U_{AB}$$

Pertanto sia "L" che "U" saranno indipendenti dalla traiettoria

ESEMPLI:



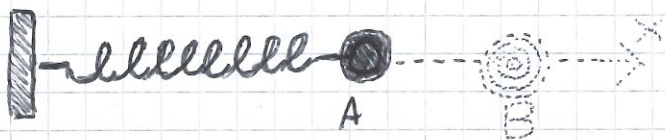
Viene esercitata una forza costante con direzione asse y quindi: $\vec{f} = f \cdot \hat{u}_y$.

Quindi l'equazione del lavoro diventerà

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_A^B f \hat{u}_y \cdot (dx \hat{u}_x + dy \hat{u}_y) = \\ = \int_A^B f dy = f (y_B - y_A).$$

Pertanto l'energia potenziale, seguendo la definizione, sarà

$$\Delta U_{AB} = - f (y_B - y_A) \rightarrow U(y) = - f(y) + C$$



La forza trattata in questo esempio è la forza elastica, definita

come $\vec{f} = -k \cdot x \cdot \hat{u}_x$ pertanto avremo la seguente equazione

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -k \cdot x \cdot \hat{u}_x \cdot dx \cdot \hat{u}_x = \dots = -\frac{1}{2} k (x_B^2 - x_A^2)$$

Inoltre sappiamo che la forza elastica è conservativa quindi possiamo definire una ENERGIA POTENZIALE, troveremo che "U(x)" sarà l'energia

$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2 + C$$

potenziale associata alla forza elastica.

ENERGIA MECCANICA

Introduciamo, al fine di constatare un teorema che vedremo dopo, una nuova energia chiamata ENERGIA MECCANICA, essa sarà sostanzialmente una somma di energie viste in precedenza (cinetica + potenziale).
In presenza delle sole forze conservative avremo

$$\begin{cases} L_{AB} = \Delta K_{AB} \\ L_{AB} = -\Delta U_{AB} \end{cases} \Rightarrow \Delta K_{AB} = -\Delta U_{AB} \rightarrow K_B - K_A = U_A - U_B \text{ perciò} \\ K_B + U_B = K_A + U_A \rightarrow \boxed{E_f = E_i}$$

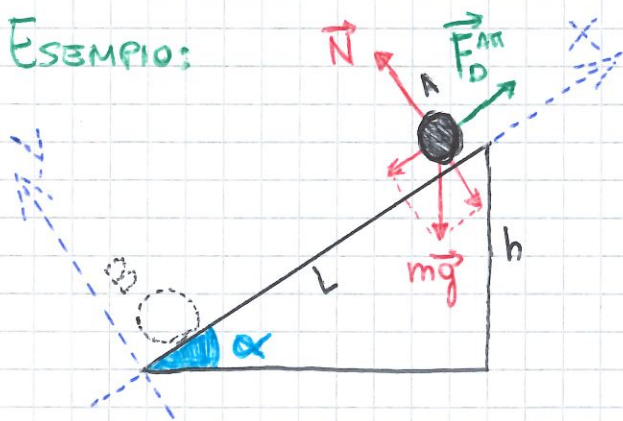
Dalla sequente osserviamo che con le sole forze conservative l'energia finale eguaglierà l'energia iniziale. Ecco che è stato appena enunciato il "TEOREMA DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA".

Ogni qual volta che siano presenti forze non conservative si ragiona in altro modo, ovvero (NC = non conservative)

$$L_{AB}^{NC} = \Delta E = E_f - E_i$$

pertanto il lavoro delle forze non conservative (come l'attrito) sarà uguale alla differenza di energia meccanica tra gli stati finale e iniziale.

ESEMPIO:



$$\Delta E_{AB} = E_B - E_A = L_{AB}^{NC}$$

$$\vec{f} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{attr} = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} x: -mg \sin \alpha + \mu_D (mg \cos \alpha) = m a_x \\ y: N = mg \cos \alpha \end{cases}$$

Dobbiamo ricavare la velocità finale (v_B) perciò calcoliamo L_{AB}^{NC} e uguagliamolo all'equazione del ΔE_{AB} sviluppata con en. cinetica e potenziale

$$\bullet \int_A^B \vec{F}_{attr} d\vec{r} = \dots = \int_A^B \mu_D mg \cos \alpha \hat{u}_x dx \hat{u}_x = -\mu_D mg \cos \alpha \cdot L$$

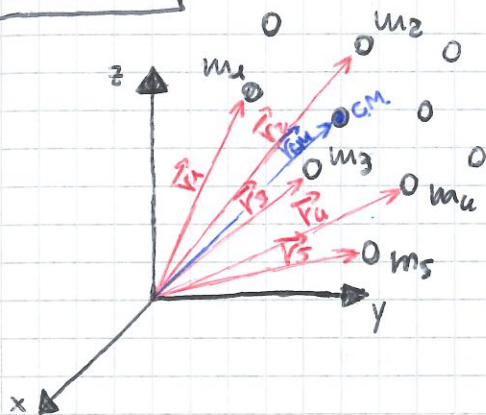
$$\bullet \Delta E_{AB} = [K_B + U_B] - [K_A + U_A] = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 - mg L \sin \alpha = -\mu_D mg \cos \alpha L$$

$$\Rightarrow v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gL(\sin \alpha - \mu_D \cos \alpha)}$$

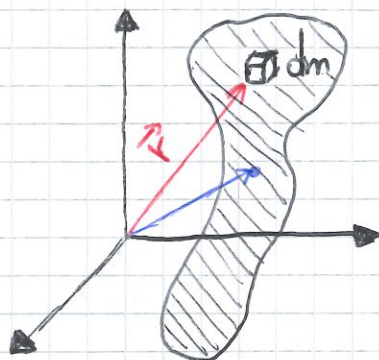
DINAMICA DI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

Introducendo questo capitolo dobbiamo soffermarci su due distribuzioni fondamentali in ambito fisico, i sistemi di riferimento possono operare su punti materiali in diverse disposizioni

DISCRETI



CONTINUI



Ciascun punto materiale ha dimensioni infinitesime.

Identifica un oggetto di dimensioni finite formato da punti materiali.

Definiamo ora il CENTRO DI MASSA DEL SISTEMA discreto

$$\vec{r}_{cm}(t) = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i(t)}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i(t)}{M} \quad \text{con} \quad \sum_i m_i = M = \text{massa totale}$$

Ricorriamo a nostra volta le altre grandezze

$$\bullet \quad \vec{v}_{cm}(t) = \frac{d}{dt} \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i(t)}{M} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i(t)}{M} \quad \rightarrow \text{Velocità del centro di massa}$$

$$\bullet \quad \vec{a}_{cm}(t) = \frac{d}{dt} \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i(t)}{M} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i(t)}{M} \quad \rightarrow \text{Accelerazione del centro di massa}$$

Fissiamo ora la quantità di moto totale del sistema e perciò il

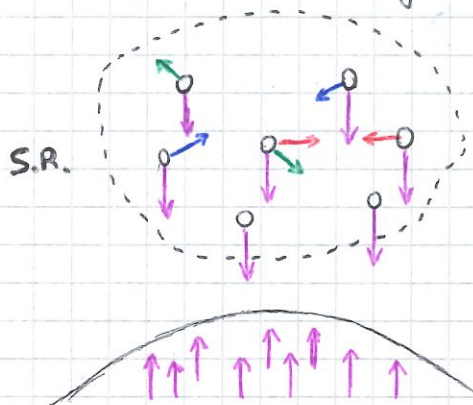
PRIMO TEOREMA DEL CENTRO DI MASSA

$$\underline{\vec{Q}(t)} = \sum_i \vec{q}_i(t) = \sum_i m_i \vec{v}_i(t) = \underline{M \vec{v}_{cm}(t)}$$

Ora deriviamo la quantità di moto precedentemente trattata rispetto al tempo e otteniamo il **SECONDO TEOREMA DEL CENTRO DI MASSA**

$$\begin{cases} \frac{d \vec{Q}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i(t) = \dots = M \vec{a}_{cm}(t) \\ \frac{d \vec{Q}(t)}{dt} = \dots = \sum_i m_i \vec{a}_i(t) = \sum_i \vec{F}_i(t) \end{cases}$$

Proviamo ad immaginare un S.R. composto da punti materiali del tipo:



$$\begin{aligned} \frac{d \vec{Q}(t)}{dt} &= \sum_i \vec{F}_i(t) = \sum_i [\vec{F}_i^{INT}(t) + \vec{F}_i^{EST}(t)] = \\ &= \sum_i \vec{F}_i^{EST}(t) = \vec{F}^{EST} \end{aligned}$$

con $\sum_i \vec{F}_i^{INT}(t) = 0$ per III° principio dinamico

Dallo sviluppo precedente ricaviamo la **PRIMA EQUAZIONE CARDINALE DELLA DINAMICA DI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI**

Unendo le due precedenti otterremo l'equazione della risultante di tutte e sole le forze esterne al sistema

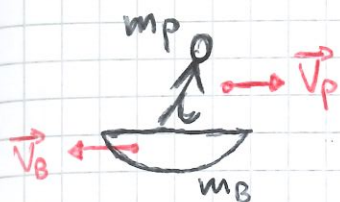
$$\vec{F}^{EST}(t) = M \vec{a}_{cm}(t)$$

Studiamo poi il caso particolare di assenza di perturbazioni, con

$$\vec{F}^{EST}(t) = 0 \iff \frac{d \vec{Q}(t)}{dt} = 0 \rightarrow \vec{Q}(t) = \vec{Q}(0)$$

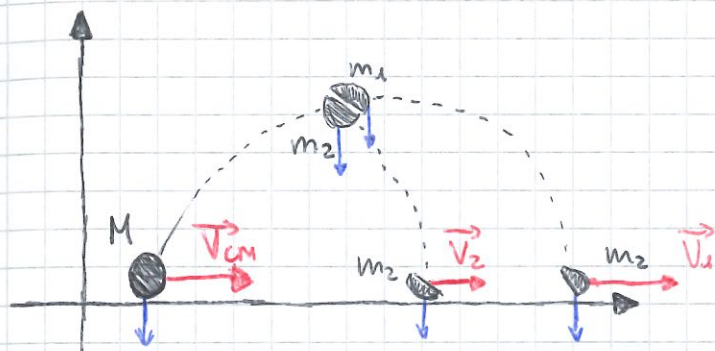
Da ciò deriverà la CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO TOTALE DEL SISTEMA DI PUNTI MATERIALI.

ESEMP1:



$$Q(0) = [m_P \vec{v}_P + m_B \vec{v}_B] = 0 \equiv F^{\text{EST}}(t) = 0$$

Quindi isoliamo e ricaviamo: $\vec{v}_B = -\frac{m_P \vec{v}_P}{m_B}$



Poiché $\vec{F}^{\text{EST}} \neq 0$ solo per la componente verticale, avremo

$$\vec{F}_x^{\text{EST}} = 0 \quad ; \quad \vec{F}_y^{\text{EST}} = \vec{f}$$

Pertanto si conserverà soltanto la componente orizzontale della quantità di moto e si avrà

$$F_x^{\text{EST}} = 0 \longrightarrow Q_x(t) = Q_x(0)$$

Da quest'ultimo problema possiamo notare che, certe volte, solo alcune componenti della quantità di moto totale del sistema si

conservano ed altre che non si conservano

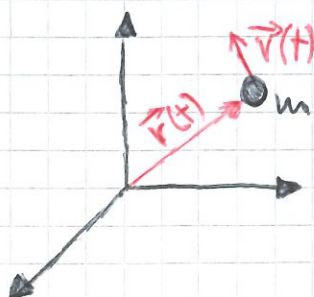
$$\begin{cases} \frac{d Q_x(t)}{dt} = F_x^{\text{EST}}(t) \\ \frac{d Q_y(t)}{dt} = F_y^{\text{EST}}(t) \\ \frac{d Q_z(t)}{dt} = F_z^{\text{EST}}(t) \end{cases} \iff \frac{d \vec{Q}(t)}{dt} = \vec{F}^{\text{EST}}(t)$$

MOMENTO ANGOLARE

Si può generalizzare al caso di un sistema di punti materiali. Questo momento angolare è calcolato rispetto all'origine.

$$\vec{l}_0(t) = \vec{r}(t) \cdot m \vec{v}(t)$$

dove " l_0 " è il MOMENTO ANGOLARE.



Deriviamo così il momento angolare

$$\frac{d l_o(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{r}(t) \cdot m \vec{v}(t)] = \dots = \vec{r}(t) \cdot \vec{f}(t) = \vec{u}_o(t)$$

dove " u_o " è il momento della forza rispetto all'origine. Ora consideriamo le grandezze totali definite come

$$L_o(t) = \sum_i l_{o,i}(t) = \sum_i m_i \vec{v}_i(t) \cdot \vec{r}_i(t)$$

$$(\dot{M}_{o,i}(t)}) = \frac{d}{dt} \sum_i l_{o,i}(t) = \sum_i m_{o,i}(t) = \vec{M}_o^{\text{EST}}(t)$$

Dallo sviluppo precedente ricaviamo il **SECONDO PRINCIPIO CARDINALI DELLA DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI**

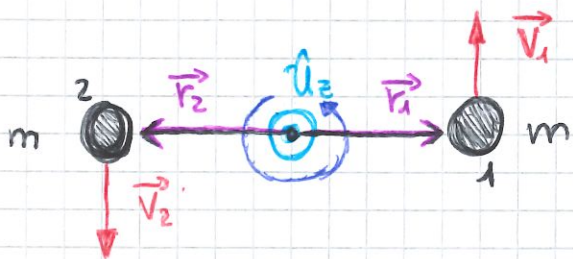
$$\frac{d \vec{L}_o(t)}{dt} = \vec{M}_o^{\text{EST}}(t)$$

Studiamo il caso particolare di assenza di perturbazioni, con

$$\vec{M}_o^{\text{EST}}(t) \equiv 0 \iff \frac{d \vec{L}_o(t)}{dt} = 0 \longrightarrow \vec{L}_o(t) = \vec{L}_o(0)$$

Da ciò deriverà la CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE.

ESEMPIO:



$$\vec{L}_o(0) = \dots = 2 r(0) m v(0) \hat{u}_z$$

$$\vec{L}_o(t) = \dots = 2 r(t) m v(t) \hat{u}_z$$

Quindi il nostro problema, per la conservazione del momento angolare diventa

$$L_o(0) = L_o(t) \longrightarrow 2 r(0) m v(0) \hat{u}_z = 2 r(t) m v(t) \hat{u}_z$$

$$\Rightarrow v(t) = \left[\frac{r(0)}{r(t)} \right] v(0) > v(0) \text{ se } r(t) < r(0)$$

INTRODUZIONE AI PRINCIPI DEI MOVIMENTI DELLE FONDAMENTA DI ELEMENTI DI DINAMICA DEL CORPO LIBERO E RIGIDO

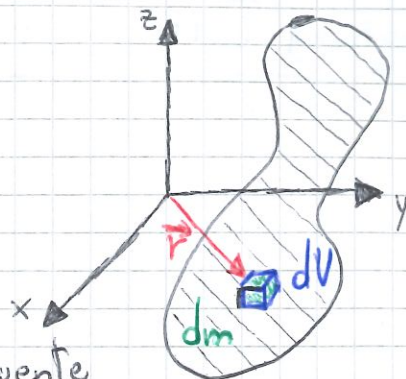
Un corpo rigido è un oggetto indeformabile con la peculiarità che la distanza tra due punti qualunque del sistema rimane costante.

Definiamo densità locale il rapporto

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dm(\vec{r})}{dV} \iff \frac{[\text{kg}]}{[\text{m}^3]}$$

Se il corpo è omogeneo allora la formula si semplifica nella seguente

$$\rho(\vec{r}) = \rho = \frac{M}{V}$$



Consideriamo ora il centro di massa del sistema, esso è facilmente individuabile tramite considerazioni sulla simmetria del corpo rigido, come con una sfera o un parallelepipedo:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \xrightarrow{\text{CONTINUO}} \frac{\int \vec{r} \cdot dm(\vec{r})}{\int dm} = \frac{\int \vec{r} \rho(\vec{r}) dV}{M}$$

Inoltre, come nel caso discreto, anche nel caso di sistema continuo di punti materiali valgono le equazioni CARDINALI della dinamica.

$$\bullet \quad \frac{d\vec{Q}(t)}{dt} = \vec{F}^{EST}(t), \quad \bullet \quad \frac{d\vec{L}_p(t)}{dt} = \vec{M}^{EST}(t)$$

In particolare, se " \vec{Q} " = 0 e " \vec{L}_p " = 0, il corpo rigido è in condizioni statiche.

Per un corpo rigido in movimento distinguiamo due moti:

- di pura TRASLAZIONE $\rightarrow \vec{Q}(t) = m \vec{v}_{CM}(t)$

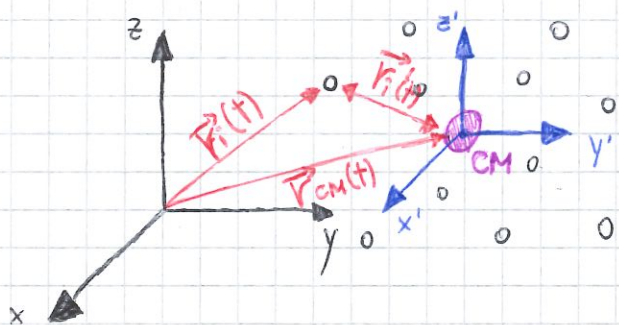
- di pura ROTAZIONE $\rightarrow \vec{L}_p(t) = I \vec{\omega}(t)$

dove "I" è il "momento di inerzia" attorno a un asse di simmetria.

Ridefiniamo quindi le EQUAZIONI CARDINALI DELLA DINAMICA DI UN CORPO RIGIDO

$$\begin{cases} \underline{\vec{F}^{\text{EST}}(t)} = \frac{d \underline{\vec{Q}}(t)}{dt} = \underline{M \vec{a}_{\text{cm}}(t)} \\ \underline{\vec{M}_p^{\text{EST}}(t)} = \frac{d \underline{\vec{L}_p(t)}}{dt} = \underline{I \vec{\alpha}(t)} \end{cases}$$

DINAMICA DI UN SISTEMA DISCRETO DI PUNTI MATERIALI NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CENTRO DI MASSA



Si costruisce il S.R. ponendo
l'origine nel centro di massa.
Una volta fatto il disegno parliamo
dei teoremi di König.

Il primo che tratteremo riguarderà il momento angolare totale e sarà

$$\underline{L_0(t)} = \underline{L_0'(t)} + \underline{\vec{r}_{\text{cm}}(t) \cdot \vec{Q}(t)}$$

Abbiamo enunciato il TEOREMA DI KÖNIG DEL MOMENTO ANGOLARE

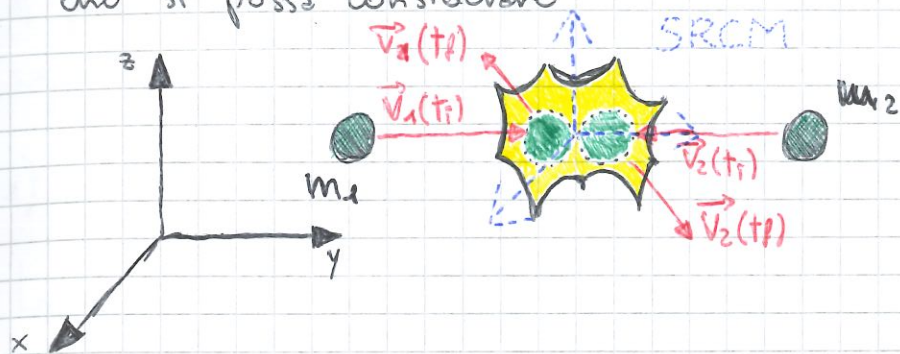
Facciamo la stessa cosa con l'energia cinetica e scriviamo

$$\underline{K(t)} = \underline{K'(t)} + \underline{\frac{1}{2} M \vec{v}_{\text{cm}}^2(t)}$$

Abbiamo enunciato il TEOREMA DI KÖNIG DELL'ENERGIA CINETICA

URTI TRA DUE CORPI

"Due corpi" indicano il più piccolo sistema discreto di punti materiali che si possa considerare



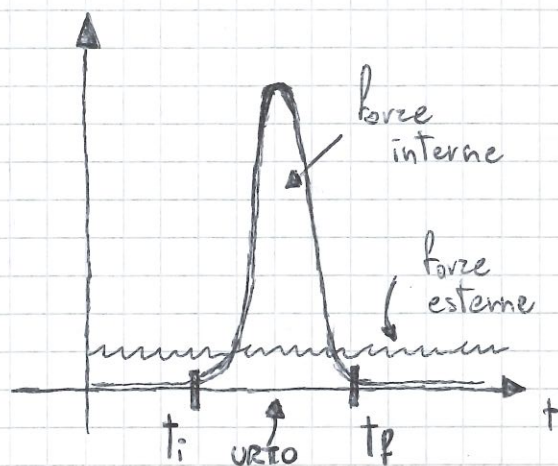
Nell'urto avviene una interazione di tipo IMPULSIVO, molto forte in un intervallo di tempo molto piccolo.

Il grafico qualitativo dell'andamento delle forze durante l'urto sarà il seguente:

Se studio la dinamica dei due punti materiali durante l'urto posso trascurare le forze esterne

$$\frac{d\vec{Q}(t)}{dt} = \vec{F}^{EST}(t) = F^{EST}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{Q} = \int_{t_i}^{t_f} F^{EST} dt = F^{EST} \cdot \tau \approx 0 \quad \text{con } \tau = t_f - t_i \text{ molto piccolo}$$



Quindi la quantità di moto del sistema si conserva e, pertanto, durante l'urto, si ha uno scambio di quantità di moto tra i due corpi:

$$\Delta \vec{q}_2 = -\Delta \vec{q}_1 ; \quad \boxed{\vec{I} = \Delta \vec{Q}}$$

TEOREMA DELL'IMPULSO

Dopo diversi calcoli otterremo che vi sarà una differenza di energia cinetica, usando König, e perciò si avrà:

$$\Delta K = \Delta K' = L_{NC}^{INT}$$

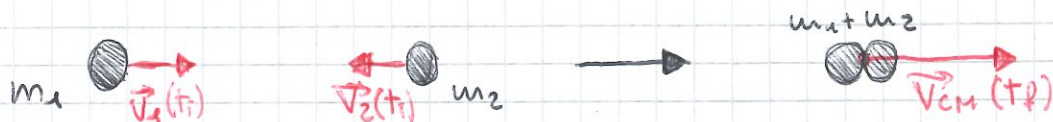
Si distingueranno i seguenti tipi di urti

- $L_{NC}^{INT} = 0 \Leftrightarrow \Delta K = \Delta K' = 0 \rightarrow$ CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA CINETICA (URTO ELASTICO)
- $L_{NC}^{INT} \neq 0 \Leftrightarrow \Delta K = \Delta K' \neq 0 \rightarrow$ NON SI CONSERVA L'ENERGIA CINETICA (URTO ANELASTICO)

■ URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO

Nell'urto completamente anelastico i corpi restano attaccati. Perciò calcoliamo la velocità finale tramite conservazione quantità di moto

$$\begin{cases} Q(t_i) = m_1 \vec{v}_1(t_i) + m_2 \vec{v}_2(t_i) \\ Q(t_f) = (m_1 + m_2) \vec{v}_{cm}(t_f) \end{cases} \Leftrightarrow v_{cm}(t_f) = \frac{m_1 v_1(t_i) + m_2 v_2(t_i)}{(m_1 + m_2)}$$



Avremo quindi $\Delta K = \Delta K' = L_{NC}^{INT} \neq 0$

■ URTO ELASTICO

Nell'urto completamente elastico vi è conservazione dell'energia cinetica, ergo

$\Delta K = \Delta K' = 0$ pertanto anche $L_{NC}^{INT} = 0$, costruiamo due sistemi

$$\text{SRI} \begin{cases} \vec{Q}(t_i) = \vec{Q}(t_f) \\ K(t_i) = K(t_f) \end{cases} \quad \text{e} \quad \text{SRCM} \begin{cases} \vec{Q}'(t_i) = \vec{Q}'(t_f) = 0 \\ K'(t_i) = K'(t_f) \end{cases}$$

Dopo un pò di calcoli si avrà

$$\text{SRI} \begin{cases} v_1(t_f) = \frac{(m_1 - m_2)v_1(t_i) + 2m_2 v_2(t_i)}{(m_1 + m_2)} \\ v_2(t_f) = \frac{2m_1 v_1(t_i) + (m_2 - m_1)v_2(t_i)}{(m_1 + m_2)} \end{cases} \quad \text{e} \quad \text{SRCM} \begin{cases} v_1'(t_f) = -v_1'(t_i) \\ v_2'(t_f) = -v_2'(t_i) \end{cases}$$

■ URTO PARZIALMENTE ANELASTICO

Si conserva solo una parte dell'energia cinetica e, senza svolgere i calcoli, si avrà un nuovo coefficiente "e" chiamato "di RESTITUZIONE".

$K'(t_f) = K'(t_i)$ ELASTICO ($e = 1$)

$K'(t_f) = e^2 K'(t_i)$ PARZIALMENTE ANELASTICO ($0 < e < 1$)

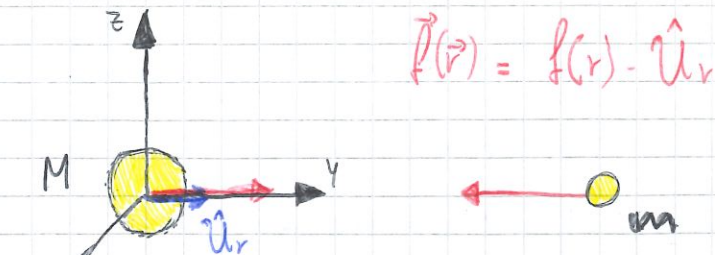
$K'(t_f) = 0$ ANELASTICO ($e = 0$)

GRAVITAZIONE

Consideriamo due corpi dotati di massa M, m , se $M \gg m$ avremo il punto materiale "m" sarà soggetto ad una forza CENTRALE:

1) La forza è CONSERVATIVA e

$$L_{AB} = F(r_B) - F(r_A) \rightarrow U(r) = -F(r) + C$$



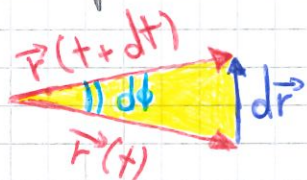
2) Dalla II° eq. cardinale della dinamica in assenza di perturbazioni avremo

$$\vec{M}^{ext}(t) \equiv 0 \rightarrow \vec{L}_o(t) = \vec{L}_o(0) \text{ costante, pertanto si avrà la seguente:}$$

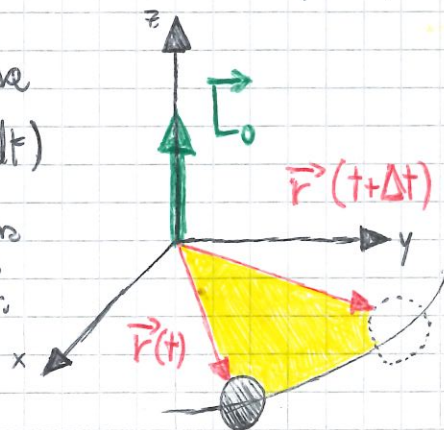
$$\vec{L}_o \equiv (\vec{L}_{o,m} = \vec{r}(t) \cdot m\vec{v}(t)) \equiv m r^2(t) \omega(t) \hat{u}_z \Rightarrow \omega(t) = \frac{L_o}{m r^2(t)}$$

3) Se $L_o = \text{costante}$ allora anche la velocità ANGOLARE è tale e di conseguenza l'AREA SPAZZATA nell'unità di tempo prestabilita

A questo punto non ci resta che trovare l'area spazzata in un intervallo infinitesimo (dt)



Si approssima la figura a un triangolo isoscele quindi la formula sarà:



$$dA = \frac{1}{2} r(t) dr = \dots = \frac{1}{2} r^2(t) d\phi(t)$$

dalla quale ricaviamo la velocità ANGOLARE:

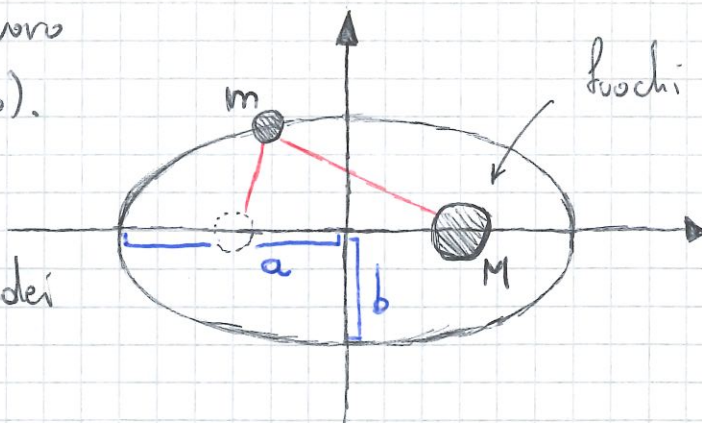
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2(t) \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{1}{2} r^2(t) \omega(t) = \frac{L_o}{2m}$$

\uparrow
 $\omega(t) = \frac{L_o}{m r^2(t)}$

LEGGI DI KEPLERO (~1600)

Queste leggi si basano sul lavoro sperimentale di BRAHE (>1500).

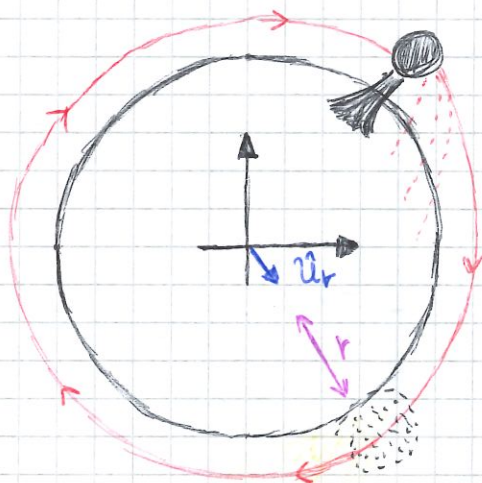
1) L'orbita dei pianeti è ellittica e il sole occupa uno dei due fuochi.



2) La velocità ANGOLARE dei pianeti è costante.

3) $T^2 = K a^3$ con K = costante di proporzionalità.

NEWTON (1697)



Esperimento del cannone di Newton: perché il proiettile ruota attorno alla Terra in moto CIRCOLARE deve essere

$$F = mg = ma = m\omega^2 r$$

Concettualmente parlando questo deve valere anche per la Luna (1)

$$\underline{F_L} = -m_L \omega_L^2 r_{LT} \hat{U}_r = \dots = -m_L \frac{4\pi^2}{K} \frac{1}{r_{LT}^2} \hat{U}_r$$

$$\omega_L^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} \rightarrow T^2 = K a^3 = K r_{LT}^3$$

Per sapere che dal punto di vista della Luna, al contrario, sarà uguale e perciò dal principio di azione e reazione avremo

$$\gamma = \left(\frac{4\pi^2}{m_L K_L} = \frac{4\pi^2}{m_L K_L}\right) = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N m^2}{kg^2}$$

CAVENDISH (1792)

e perciò avremo la **LEGGI DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE**

$$\underline{\vec{F}} = -\gamma \frac{m M}{r^2} \hat{U}_r$$

ENERGIA POTENZIALE DELLA FORZA DI GRAVITAZIONE

A questo punto per calcolare tale grandezza dovremo svolgere diversi calcoli

$$\begin{aligned}
 L_{AB} &= \int_A^B f(r) dr = \int_A^B -\gamma \frac{mM}{r^2} \hat{U}_r \cdot (dr \cdot \hat{U}_r + r d\phi \hat{U}_\phi) \\
 &= -\gamma mM \int_A^B \frac{dr}{r^2} = -\gamma mM \left[-\frac{1}{r} \right]_A^B \\
 &= \gamma mM \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = -\Delta U_{AB} = -[U(r_B) - U(r_A)]
 \end{aligned}$$

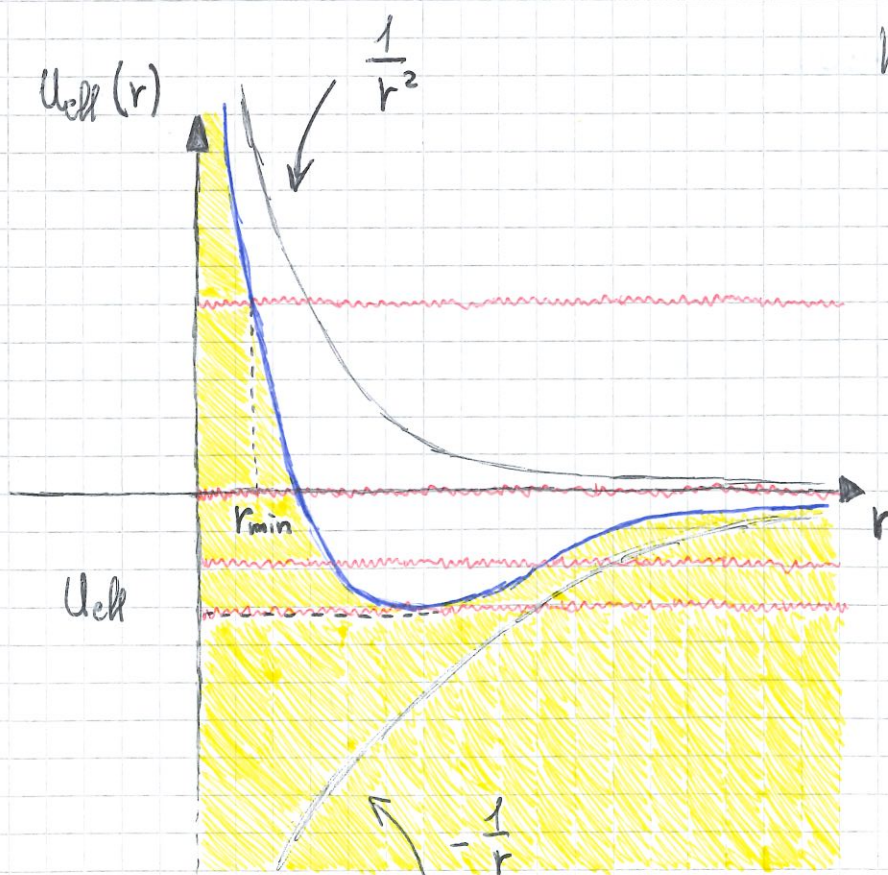
Perciò deve essere: $U(r) = -\gamma \frac{mM}{r} + C$

POTENZIALE EFFICACE

$$\begin{aligned}
 E &= K + U = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{mM}{r} = \dots = \\
 &= \frac{1}{2} m v_r^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2} - \gamma \frac{mM}{r} = K_r(v_r) + U_{\text{eff}}(r)
 \end{aligned}$$

Perciò avremo: $E(v, r) = K_r(v_r) + U_{\text{eff}}(r) \geq U_{\text{eff}}(r)$

$$K_r(v_r) \geq 0$$



$E > 0$: IPERBOLA

$E = 0$: PARABOLA

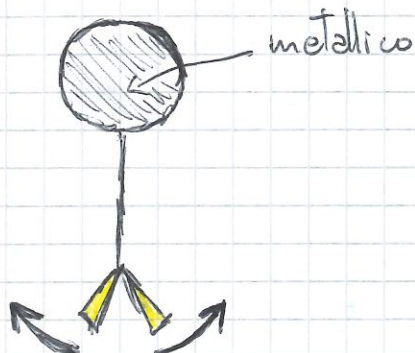
$U_{\text{eff}} < E < 0$: ELLISSE

$E = U_{\text{eff}}$: CIRCONFERENZA

ELETTROSTATICA

Questa branca della fisica si occupa dello studio di fenomeni elettrici NON dipendenti del tempo. Il tutto è iniziato da

ELETTROSCOPIO A FOGLIE



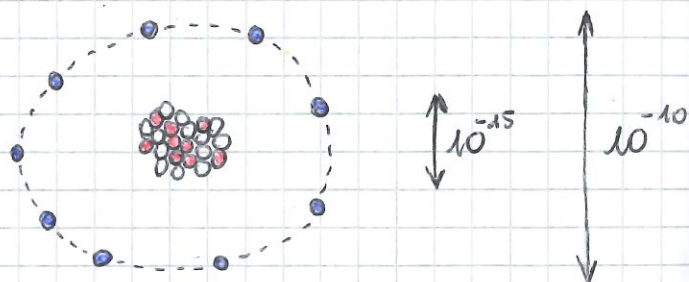
- 1) Cariche di segno opposto si attraggono
- 2) Cariche dello stesso segno si respingono
- 3) La carica si conserva
- 4) La carica è quantizzata

MODELLO DELL'ATOMO DI BOHR (1915)

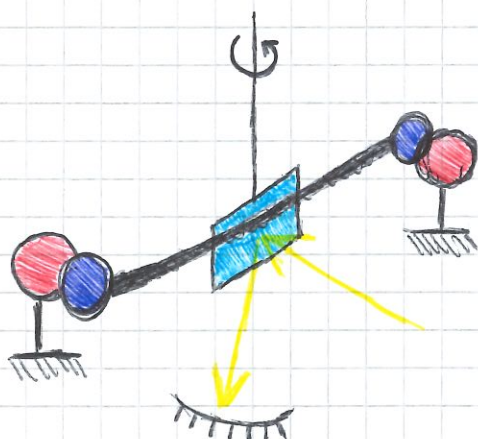
Avremo delle particelle cariche di valore:

- elettroni = $[e^-] = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- protoni = $[p] = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Perciò $[p] = -[e^-]$



LEGGE DI COULOMB (~ 1790)



BILANCIA A TORSIONE



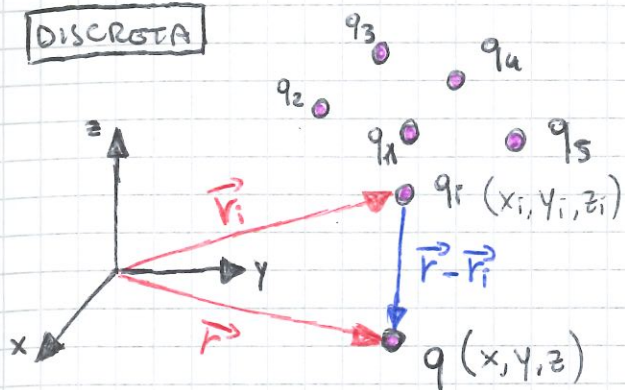
Consideriamo " ϵ_0 " = COSTANTE DIELETTRICA NEL VUOTO

$$\vec{F}_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{u}_r$$

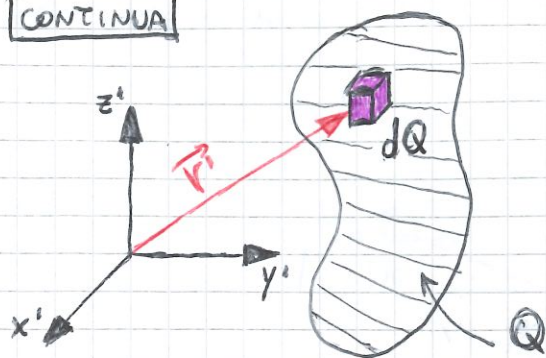
$$\longleftrightarrow \vec{F}_g = -\gamma \frac{mM}{r^2} \hat{u}_r$$

Nel caso di una DISTRIBUZIONE DI CARICA

DISCRETA



CONTINUA



Per una distribuzione di carica discreta, la forza che agisce sulla carica puntiforme q è data da: e per il **PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI**:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \hat{U}_{r_i} \Rightarrow \hat{U}_{r_i} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

$$= \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

In coordinate cartesiane diventa: $\vec{F} = F_x \hat{U}_x + F_y \hat{U}_y + F_z \hat{U}_z$

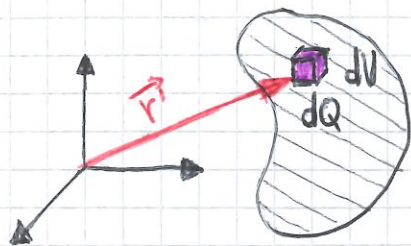
$$\vec{F} = F_x \hat{U}_x + F_y \hat{U}_y + F_z \hat{U}_z \quad \left\{ \begin{array}{l} F_x = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_i (x - x_i)}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ F_y = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_i (y - y_i)}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ F_z = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_i (z - z_i)}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{\frac{3}{2}}} \end{array} \right.$$

La precedente deriva dalla seguente sostituzione

$$|\vec{r} - \vec{r}_i| = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$$

Nel caso di distribuzione di carica continua si introduce una nuova grandezza fisica chiamata DENSITÀ DI CARICA. Si divide in:

DENSITÀ DI CARICA VOLUMETRICA

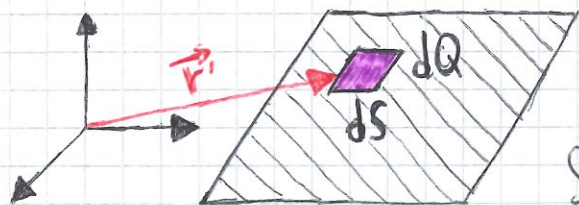


$$\rho(\vec{r}) = \frac{dQ}{dV} \rightarrow [\rho] = \frac{C}{m^3}$$

Se poi un oggetto è omogeneo: $\rho(\vec{r}) = \rho = \frac{Q}{V}$

perciò avremo $Q = \int dQ = \int_V \rho(\vec{r}) dV$

DENSITÀ DI CARICA SUPERFICIALE

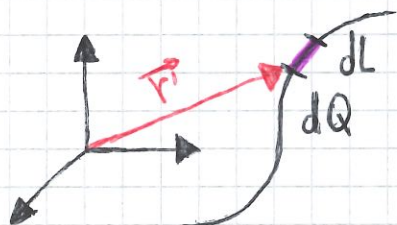


$$\sigma(\vec{r}) = \frac{dQ}{dS} \rightarrow [\sigma] = \frac{C}{m^2}$$

Se poi un oggetto è omogeneo: $\sigma(\vec{r}) = \sigma = \frac{Q}{S}$

perciò avremo $Q = \int dQ = \int_S \sigma(\vec{r}) dS$

DENSITÀ DI CARICA LINEARE

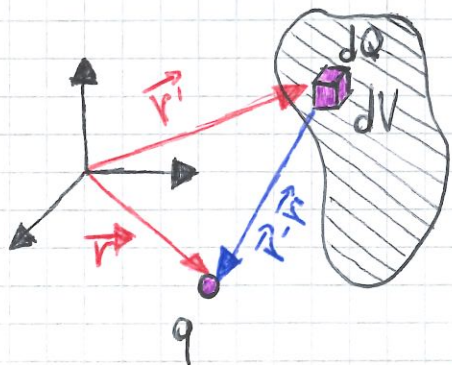


$$\lambda(\vec{r}) = \frac{dQ}{dL} \rightarrow [\lambda] = \frac{C}{m}$$

Se poi un oggetto è omogeneo: $\lambda(\vec{r}) = \lambda = \frac{Q}{L}$

perciò avremo $Q = \int dQ = \int_L \lambda(\vec{r}) dL$

ESEMPIO:



Secondo le precedenti abbiamo

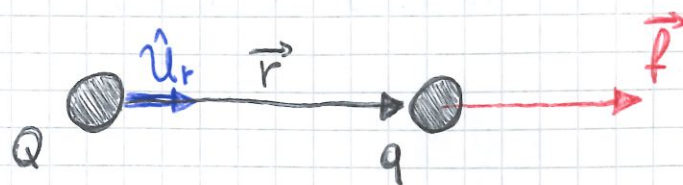
$$\rho(\vec{r}) = \frac{dQ}{dV} \quad \text{e perciò avremo:}$$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int d\vec{F} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q dQ \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') dV' \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \end{aligned}$$

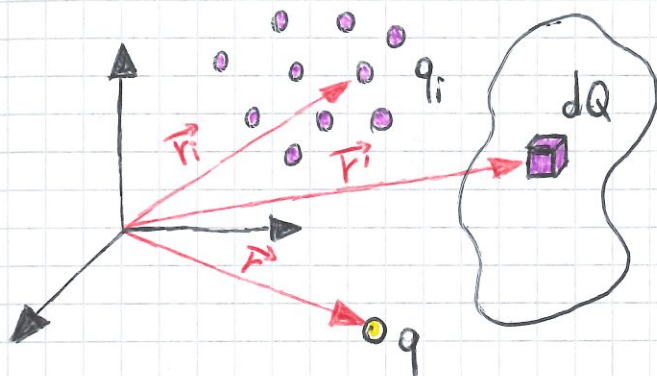
PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE
DEGLI EFFETTI

CAMPO ELETTRICO

LEGGE DI COULOMB:



Riprendiamo la formula: $\vec{F}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^3} \vec{r}$

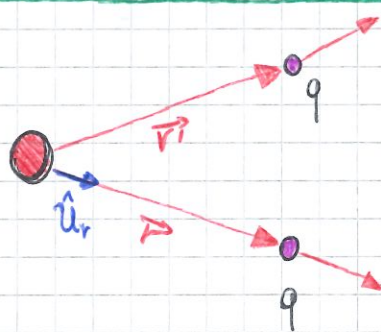


Sia nel caso di distribuzione discreta che continua, la forza di interazione elettrostatica che agisce sulla carica puntiforme "q" è sempre proporzionale a "q" stessa.

Allora si può introdurre una nuova grandezza fisica che viene chiamata CAMPO ELETTRICO proporzionale alla carica "q" di prova:

$$\vec{E}(r) \equiv \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(r)}{q} \longrightarrow \vec{F}(r) = q \vec{E}(r) \equiv \frac{[F]}{[q]} = \frac{[N]}{[C]}$$

CAMPO ELETTRICO DI UNA CARICA PUNTIFORME



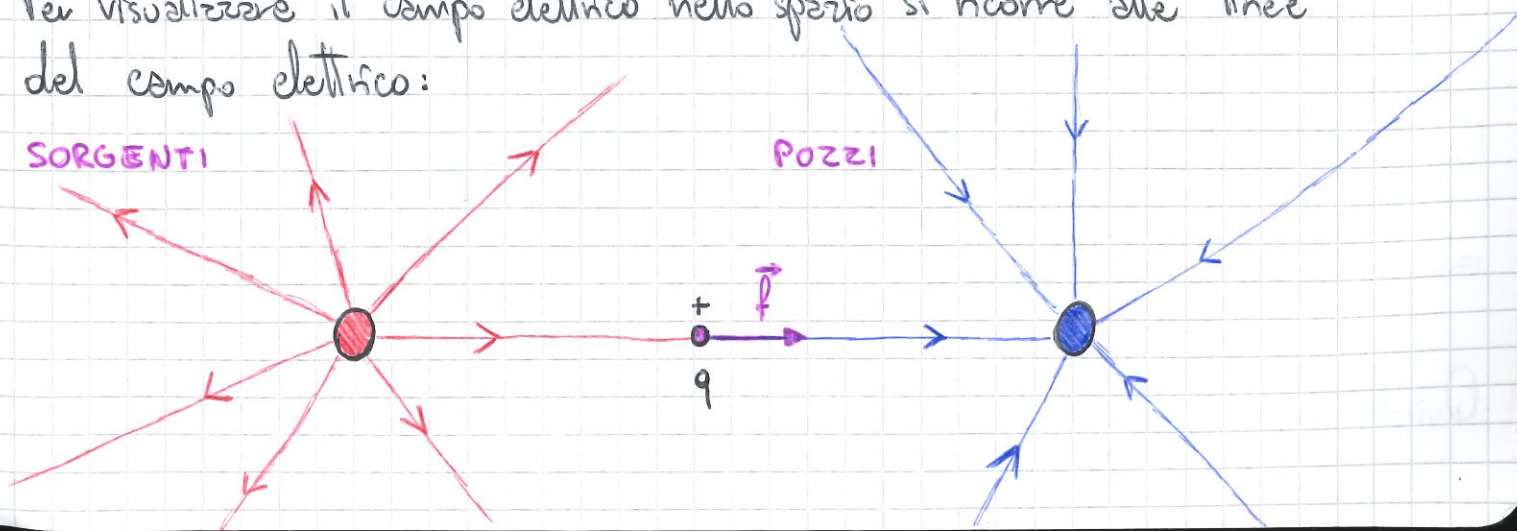
$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{u}_r$$

$$\vec{F}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{u}_r \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{u}_r}$$

Per visualizzare il campo elettrico nello spazio si ricorre alle linee del campo elettrico:

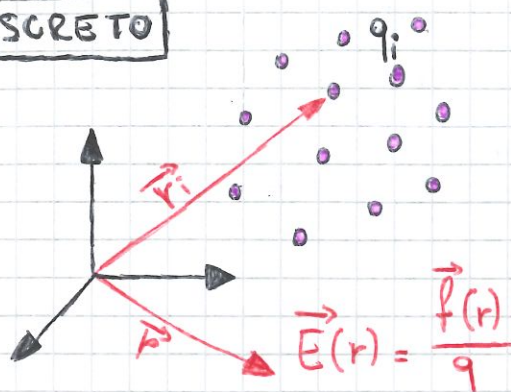
SORGENTI

POZZI



Il CAMPO ELETTRICO generato da una distribuzione di cariche è dato da

DISCRETO



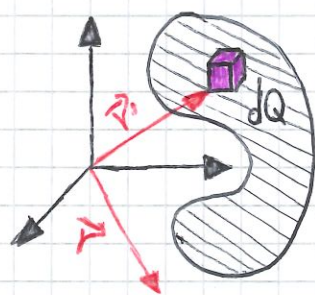
Calcoliamo il campo elettrico "cartesiano":

$$\vec{E}(r) = \frac{\vec{F}(r)}{q} = \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} q_i$$

$$\begin{cases} E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{(x-x_i)}{[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2]^{3/2}} \\ E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{(y-y_i)}{[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2]^{3/2}} \\ E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{(z-z_i)}{[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2]^{3/2}} \end{cases}$$

CONTINUO

Calcoliamo in coordinate cartesiane (x, y, z)



$$\vec{E}(r) = \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') dV' \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\begin{cases} E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(x', y', z') dx' dy' dz' \frac{(x-x')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \\ E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(x', y', z') dx' dy' dz' \frac{(y-y')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \\ E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(x', y', z') dx' dy' dz' \frac{(z-z')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \end{cases}$$

ESEMPIO:

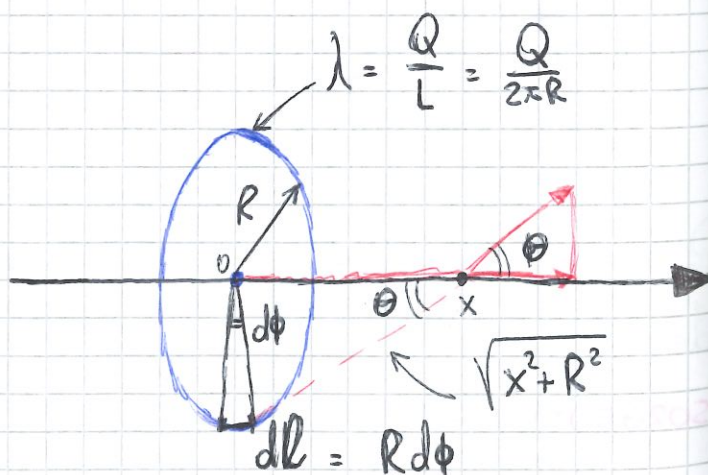
$$dE_x(x, 0, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dQ \frac{1}{r^2} \cos\theta =$$

$$= \dots = \frac{\lambda R d\phi}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$E_x(x, 0, 0) = \int dE_x = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= \dots = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

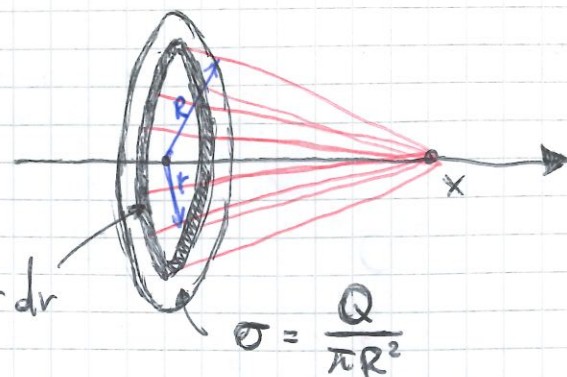
Quindi per $x=0$ allora $E_x = 0$



$$dE_x = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(r^2+x^2)^{3/2}} =$$

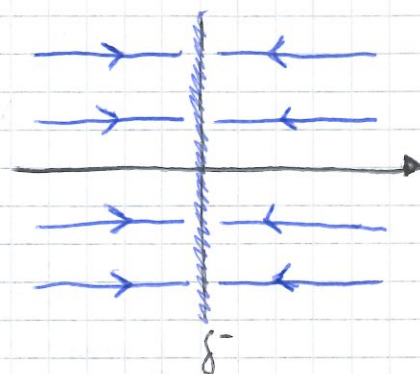
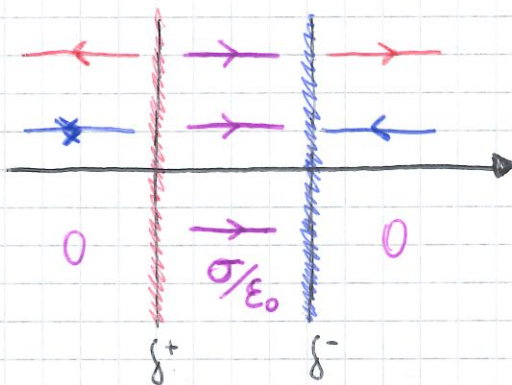
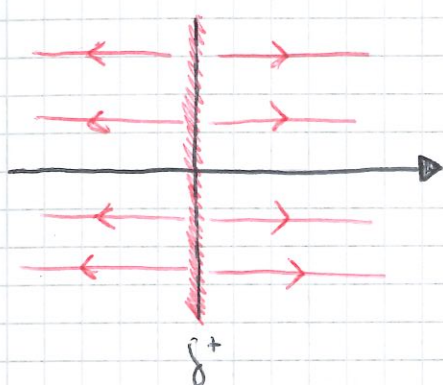
$$= \dots = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{(r^2+x^2)^{3/2}}$$

$$dl = \sigma \cdot 2\pi r dr$$



$$E_x(x, 0, 0) = \int dE_x = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2+x^2)^{3/2}} = \dots$$

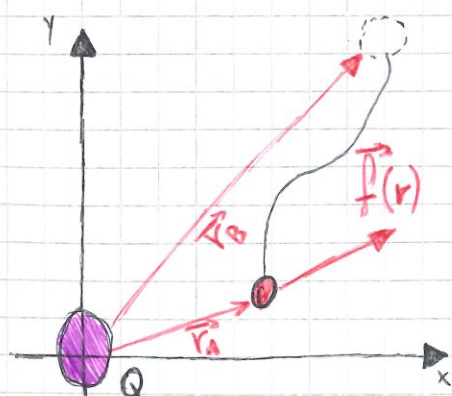
$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} \right)$$



Le linee del campo elettrico godono di diverse proprietà:

- "nascono" dalle cariche positive e "muoiono" nelle cariche negative
- "nascono" all'infinito e "muoiono" nelle cariche negative
- "nascono" dalle cariche positive e "muoiono" all'infinito
- NON POSSONO chiudersi su se stesse perché la forza di Coulomb è conservativa

Possiamo quindi definire una nuova grandezza fisica chiamata ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA



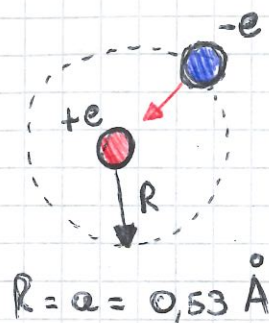
$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F}(r) dr = -\Delta U_{AB} = -[U(r_B) - U(r_A)]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Qq \int_A^B \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Qq \left(-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A} \right)$$

Da cui: $U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r} + C$, avremo:

$\lim_{r \rightarrow \infty} U(r) = \dots = 0$ e, poiché conservativa, $\Delta U_{AB} = U_B - U_A = 0$

ESEMPIO:



Si calcoli l'energia di ionizzazione dell'atomo di idrogeno nel modello di Bohr.
All'equilibrio abbiamo

$$\begin{cases} K^{eq}(V_{eq}) = \frac{1}{2} m V_{eq}^2 \\ U^{eq}(r^{eq}=a) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a} \end{cases} \Rightarrow K^{eq} = -\frac{1}{2} U^{eq}$$

Quindi avremo:

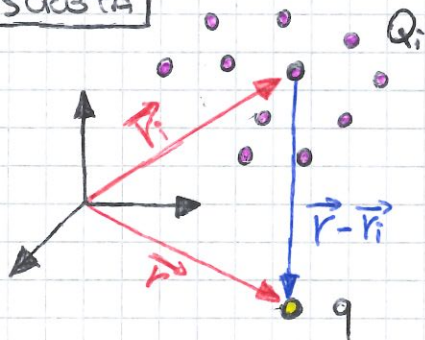
$$\begin{aligned} \Delta E &= \Delta K + \Delta U = [U(\infty) - U(a)] + [K(\infty) - (K^{eq} + I)] = \\ &= -K^{eq} - I - U^{eq}(a) = \frac{1}{2} U^{eq}(a) - I - U^{eq}(a) = -\frac{1}{2} U^{eq}(a) - I = 0 \end{aligned}$$

Da cui:

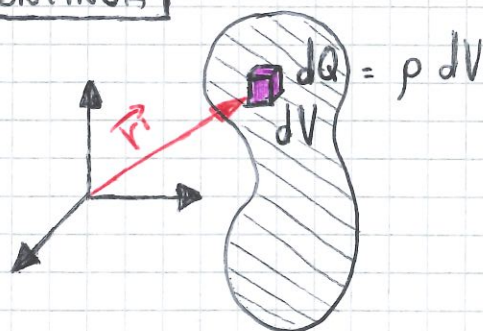
$$I = -\frac{1}{2} U^{eq}(a) = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a} \approx 21,8 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 13,6 \text{ eV}$$

L'ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA di una distribuzione di cariche è data da

DISCRETA



CONTINUA



Per le due distribuzioni di carica avremo rispettivamente: grazie al

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI:

$$U(r) [= \sum_i U_i(r)] = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

$$U(r) [= \int dU] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \int \frac{\rho(\vec{r}') dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Poiché la forza elettrostatica è sempre proporzionale alla carica di prova "q" che uso per sondare la forza elettrostatica, si può definire

$$\vec{E}(r) = \frac{\vec{F}(r)}{q}$$

Analogamente l'energia potenziale elettrostatica è sempre proporzionale a "q", allora posso definire una nuova grandezza fisica

$$V(r) = \frac{U(r)}{q} \rightarrow [V] = \frac{[U]}{[q]} = \frac{[J]}{[C]} = [V] = \text{Volt}$$

della POTENZIALE ELETROSTATICO.

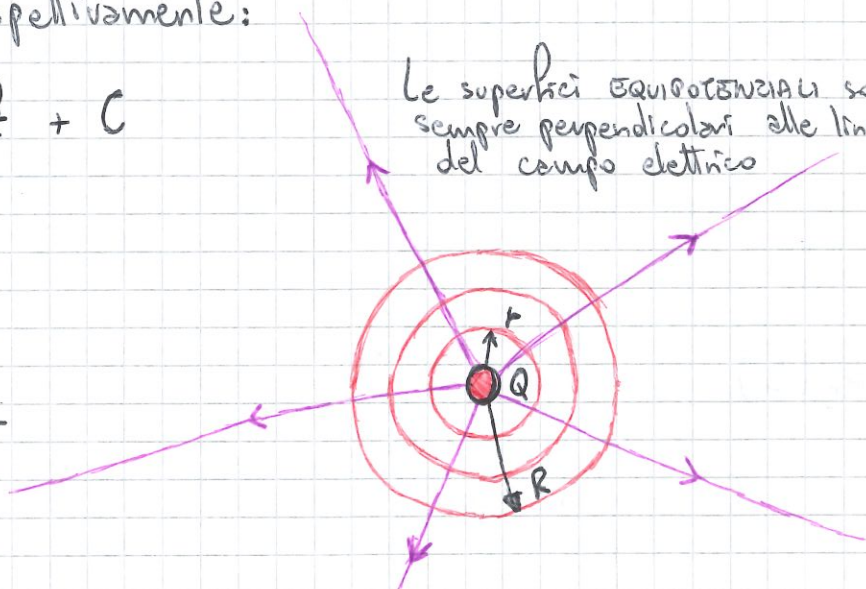
Le relative formule dipenderanno dalla carica puntiforme o una distribuzione di cariche, rispettivamente:

$$\bullet V(r) = \frac{U(r)}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + C$$

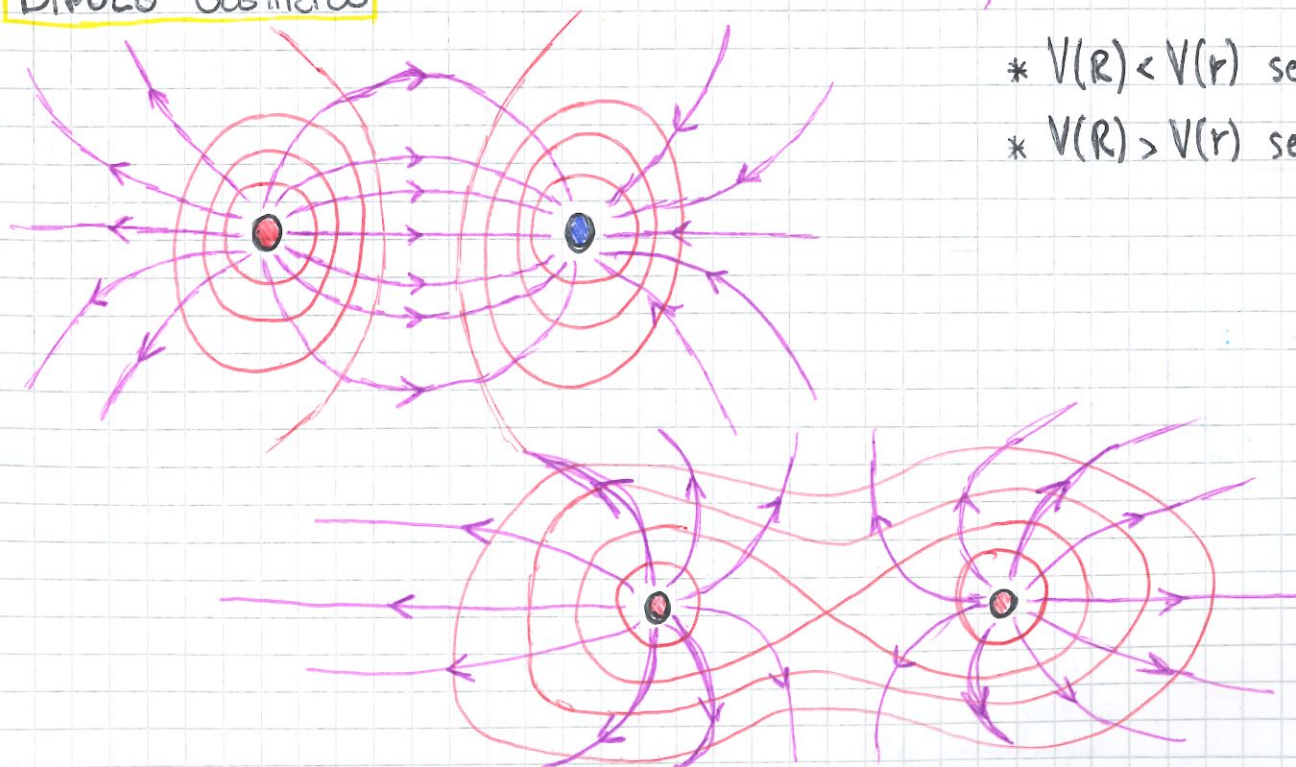
$$\bullet V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

$$\bullet V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Le superfici EQUIPOTENZIALI sono sempre perpendicolari alle linee del campo elettrico



DIPOLLO ELETTRICO

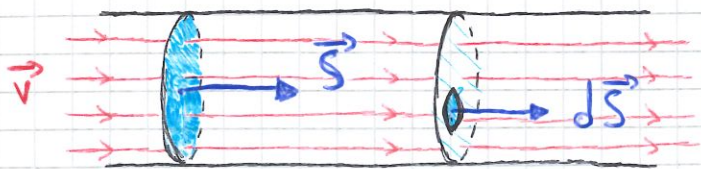


$$* V(R) < V(r) \text{ se } Q > 0$$

$$* V(R) > V(r) \text{ se } Q < 0$$

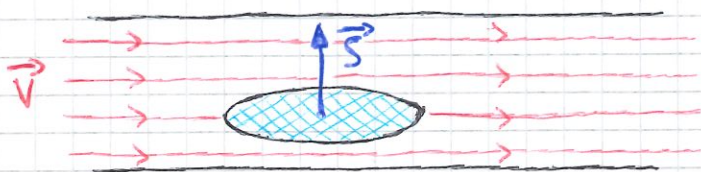
TEOREMA DI GAUSS:

Al fine di introdurre questo importante teorema abbiamo bisogno di definire una nuova grandezza fisica scalare: il FLUSSO di un campo vettoriale attraverso una SUPERFICIE.



$$\Phi_S(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{S}$$

$$\Phi_S(\vec{v}) = \int_S d\Phi(\vec{v}) = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$



$$\Phi_S(\vec{v}) = 0$$

Ora che abbiamo definito le premesse, trattiamo il **TEOREMA DI GAUSS**:

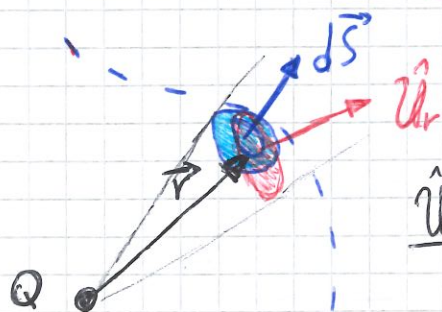
Consideriamo una distribuzione di carica, continua e/o discreta, ed una superficie chiusa "S", allora

$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_S}{\epsilon_0}$$

dove "Q_S" è la CARICA TOTALE all'interno della superficie.

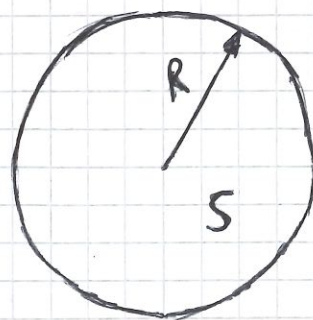
Per **DIMOSTRARE** il precedente consideriamo prima "S" e poi "S'":

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \Phi_S(\vec{E}) &= \int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\hat{u}_r \cdot d\vec{S}}{r^2} = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_S d\Omega = \frac{Q_S}{\epsilon_0} \end{aligned}$$



$$\frac{\hat{u}_r \cdot d\vec{S}}{r^2} = d\Omega$$

ANGOLO SOLIDO
sotteso all'elemento di
superficie "dS"

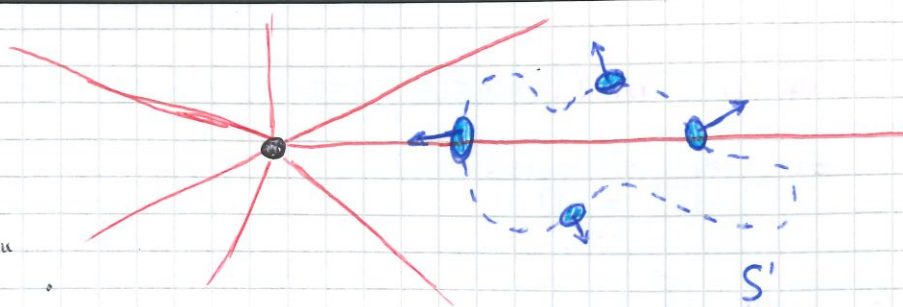


ANGOLO SOLIDO TOTALE:

$$\Omega = \frac{\text{sup. tot.}}{R^2} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi$$

② $\Phi_S(\vec{E}) = 0$

Il campo elettrico entra ed esce dalla superficie "S".



Nel caso delle due distribuzioni di carica:

- DISCRETA: $\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_S}{\epsilon_0} = \frac{\sum_i Q_i, S}{\epsilon_0}$

- CONTINUA: $\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_S}{\epsilon_0} = \frac{\int dQ}{\epsilon_0} = \frac{\int \rho \cdot dV}{\epsilon_0}$

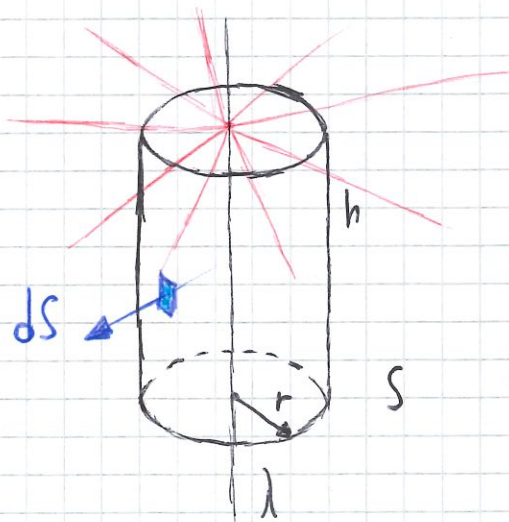
Questo teorema ci permette di calcolare il campo elettrico di una distribuzione di cariche quando queste presentano una certa simmetria

ESEMPIO: (SIMMETRIA CILINDRICA)

• $\int_{\text{integrale}} \vec{E}(r) d\vec{S} = \dots = E(r) \cdot 2\pi r h = \int dS$

• $\int \vec{E}(r) d\vec{S} = \frac{Q_S}{\epsilon_0} = \frac{\lambda \cdot h}{\epsilon_0}$

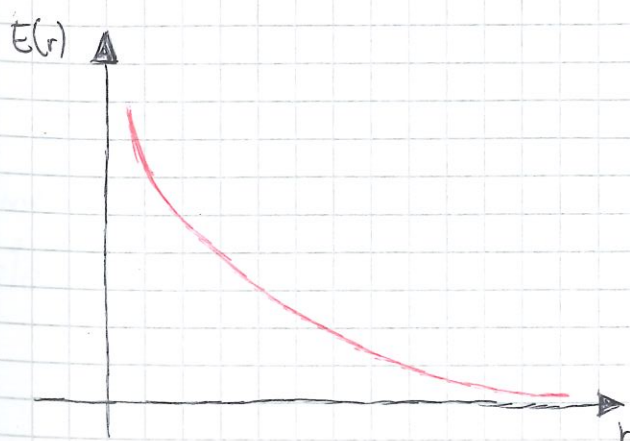
→ $\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{u}_r$



In questo esempio, come varia il potenziale elettrico?

$$\Delta V = V(r) - V(R) = V(r) = - \int_R^r \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} =$$

$$= - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_R^r \frac{1}{r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right)$$

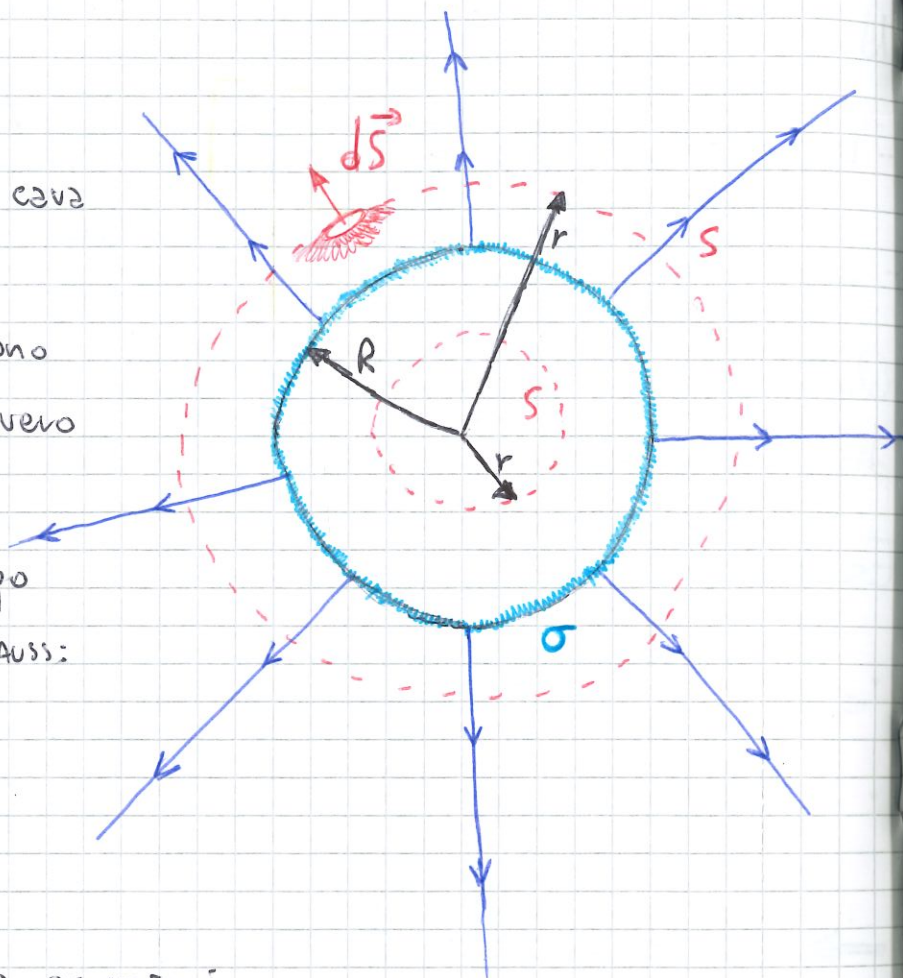


DUE EQUAZIONI DI MAXWELL PER IL CAMPO ELETTROSTATICO

$$\begin{cases} \oint \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 & \text{IRROTAZIONALITÀ del CAMPO ELETTRICO} \\ \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_S}{\epsilon_0} & \text{TEOREMA DI GAUSS} \end{cases}$$

ESEMPIO: (GUSCIO SFERICO)

Consideriamo una figura sferica, cava all'interno, con distribuzione di carica superficiale " σ ". Esistono così due regioni di spazio, ovvero interna o esterna all'oggetto. Calcoliamo il modulo del campo elettrico tramite il TEOREMA DI GAUSS:



$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \cdot \hat{u}_r$$

1) $r > R$

Usiamo Maxwell e le sue equazioni

$$\begin{cases} \oint_S \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = \dots = E(r) \oint dS = \dots = E(r) 4\pi r^2 & \text{"FLUSSO"} \\ \oint_S \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_S}{\epsilon_0} = \dots = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{\epsilon_0} & \text{"GAUSS"} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dots \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad \text{oppure} \quad E(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R^2}{r^2} \quad (*)$$

2) $r < R$

$$\begin{cases} \oint_S \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = \dots = E(r) 4\pi r^2 \\ \oint_S \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_S}{\epsilon_0} = 0 \end{cases}$$

Il campo elettrico risulta nullo poiché non vi sono cariche contenute all'interno della superficie sferica " S " considerata:

$$E(r) \equiv 0$$

Ora che abbiamo finito con i campi elettrici, passiamo ai POTENZIALI. Siccome non possiamo calcolare il potenziale ASSOLUTO, osserveremo la differenza di esso. Considero perciò

$$\Delta V_{AB} = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E}(r) \cdot d\vec{r}$$

campo elettrico di
carica puntiforme
(*)

1) $r > R$

$$V(r) = V(\infty) + [V(r) - V(\infty)] = V(\infty) - \int_{\infty}^r \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} =$$

$$= \dots = V(\infty) - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} dr = \dots$$

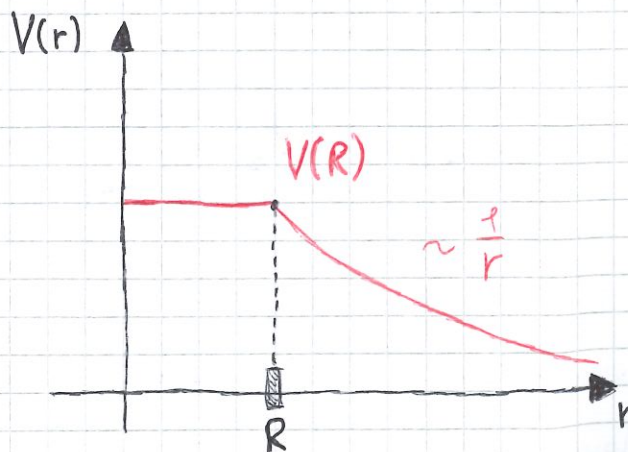
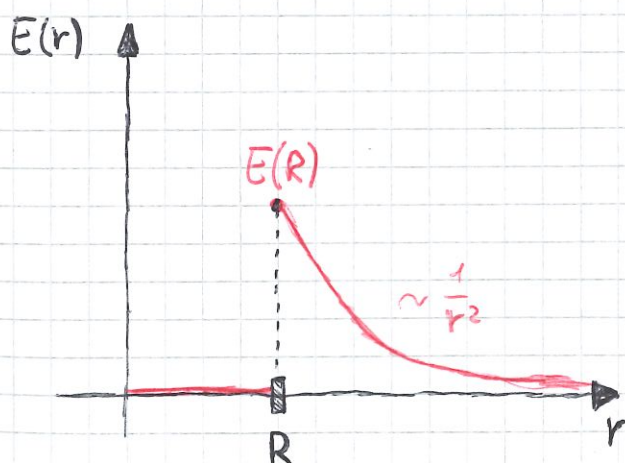
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad \text{considerando} \quad V(\infty) = 0$$

2) $r < R$

$$V(r) = V(R) + [V(r) - V(R)] = V(R) - \int_R^r \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} =$$

$$= \dots = V(R) \quad \text{COSTANTE}$$

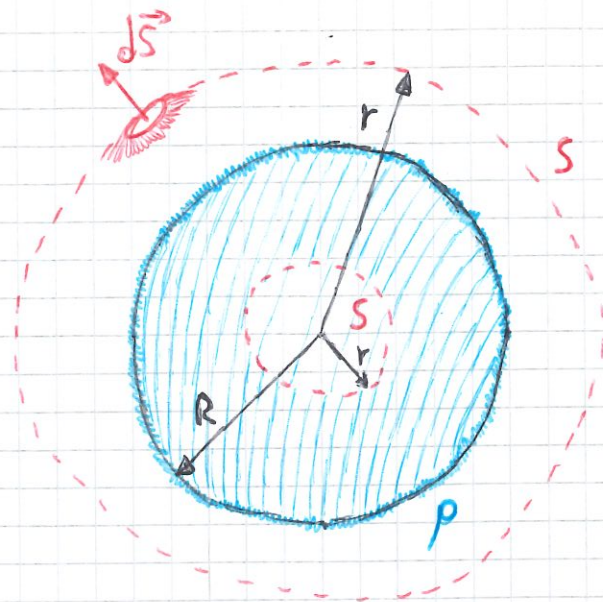
Questo poiché il campo elettrico all'interno del guscio sferico è nullo, perciò possiamo disegnare i grafici qualitativi:



ESEMPIO: (SFERA PIENA)

Consideriamo una figura sferica, non cava all'interno, con distribuzione di carica volumetrica " ρ ". Esistono così due regioni di spazio, ovvero interna o esterna all'oggetto.

Calcoliamo il modulo del campo elettrico tramite il TEOREMA DI GAUSS:



$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \cdot \hat{U}_r$$

1) $r > R$

$$\oint_S \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = \dots = E(r) \oint_S dS = \dots = E(r) 4\pi r^2 \quad \text{"FLUSSO"}$$

$$\left\{ \oint_S \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_S}{\epsilon_0} = \dots = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0} \right. \quad \text{"GAUSS"}$$

$$\Rightarrow \dots \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad \text{oppure} \quad E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \quad (*)$$

2) $r < R$

$$\oint_S \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = \dots = E(r) 4\pi r^2 \quad \text{"FLUSSO"}$$

$$\left\{ \oint_S \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_S}{\epsilon_0} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} \right. \quad \text{"GAUSS"}$$

$$\Rightarrow \dots \quad E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad (*)$$

Ora che abbiamo finito con i campi elettrici, passiamo ai potenziali. Siccome non possiamo calcolare il potenziale Assoluto, osserveremo la differenza di esso. Considero perciò

$$\Delta V_{AB} = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E}(r) \cdot d\vec{r}$$

1) $r > R$

$$V(r) = V(\infty) + [V(r) - V(\infty)] = V(\infty) - \int_{\infty}^r \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} =$$

$$= \dots = V(\infty) - \frac{\rho}{3\epsilon_0} R^3 \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} dr = \dots$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad \text{considerando } V(\infty) = 0$$

2) $r < R$

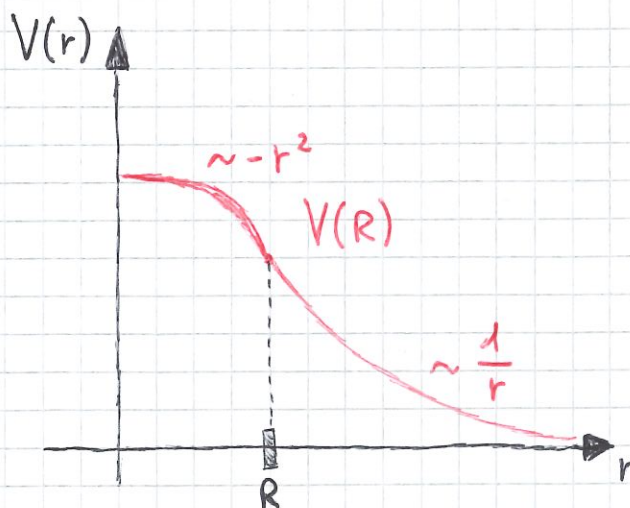
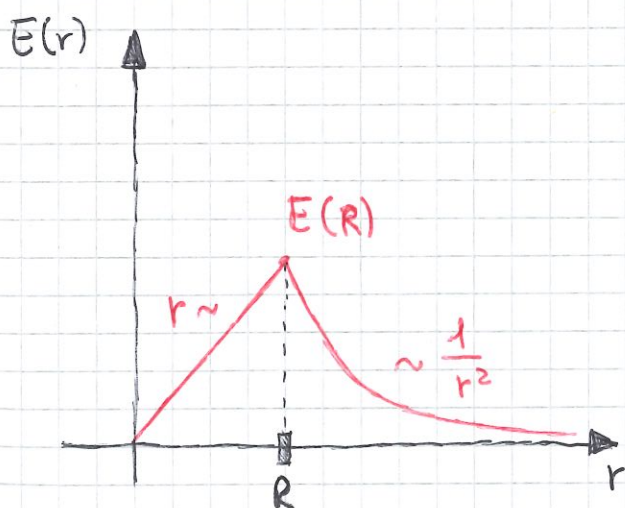
$$V(r) = V(R) + [V(r) - V(R)] \Rightarrow \text{Poiché } V(R) = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}$$

campo elettrico
interno (*)

$$= V(R) - \int_R^r \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} = \dots = V(R) - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \int_R^r r dr = \dots$$

$$= \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0}$$

Questo poiché il campo elettrico all'interno della sfera piena non è nullo, perciò possiamo disegnare i grafici qualitativi



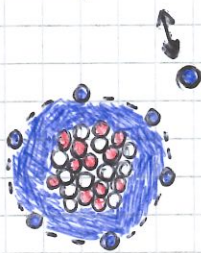
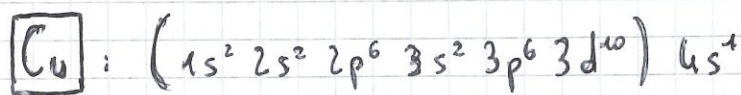
CAMPO ELETTRICO NEI MATERIALI

Inanzitutto dobbiamo distinguere due classi di materiali che tratteremo:

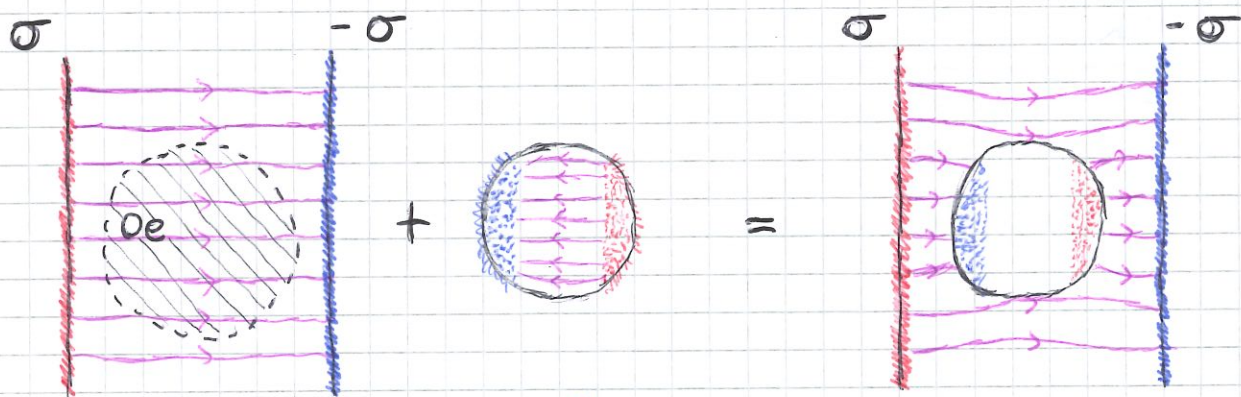
- METALLICI e/o CONDUTTORI

- DIELETTRICI e/o ISOLANTI

Alcuni materiali, come il rame (Cu), possono condurre perché dotati di 1 elettrone libero di muoversi data la loro configurazione:



CONDUTTORI IN EQUILIBRIO

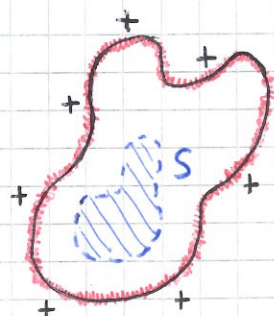


All'equilibrio, il campo elettrostatico all'interno di un conduttore è SEMPRE NULLO ($\vec{E} \equiv 0$). Alcune conseguenze sono:

1) L'eccesso di carica elettrica e le cariche indotte possono accumularsi solamente sulla superficie del conduttore.

Per **DIMOSTRARLO** si usa il Teorema di Gauss:

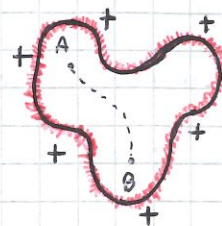
$$\begin{cases} \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_S}{\epsilon_0} \end{cases} \Rightarrow Q_S = 0$$



Per l'arbitrarietà della scelta della superficie, all'interno del conduttore non ci possono essere cariche ($Q_s = 0$).

2) Il potenziale elettrostatico è costante su tutto il conduttore, infatti:

$$\begin{cases} \Delta V = - \int_A^B \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} = 0 \\ \vec{E}(r) = 0 \end{cases} \Rightarrow V(r_A) = V(r_B)$$



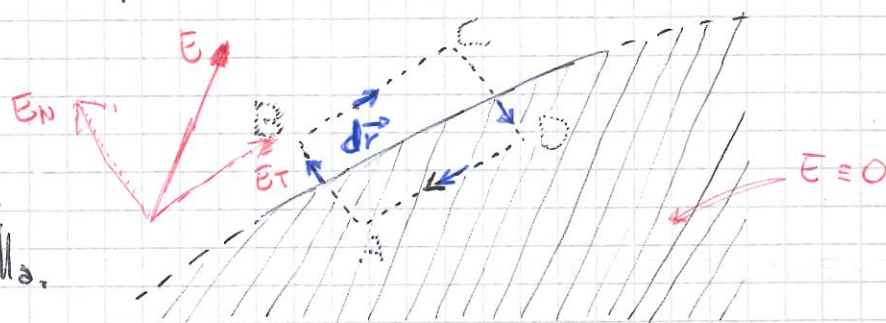
Per l'arbitrarietà della scelta dei punti "A" e "B", il potenziale elettrostatico è lo stesso in tutti i punti del conduttore.

3) La superficie del conduttore è equipotenziale ed il campo elettrico esterno, in prossimità di tale superficie, è perpendicolare alla superficie stessa.

Per dimostrarlo dobbiamo verificare che la componente tangenziale del campo sia nulla.

Sappiamo che:

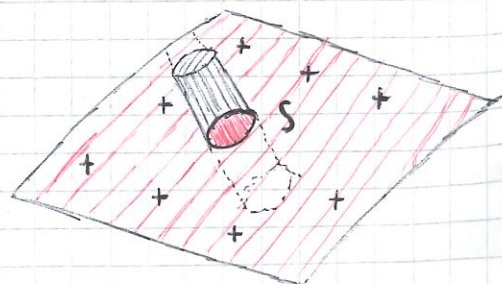
$$\begin{cases} \oint \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} = 0 \\ \oint \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} = \int_A^B \dots + \dots + \int_0^A \dots = [E_N \cdot h] + E_T \cdot l + [-E_N \cdot h] + 0 = E_T \cdot l \end{cases}$$



Avendo a sistema le precedenti equazioni otteniamo che " $E_T = 0$ ".

4) Il campo elettrostatico nelle immediate vicinanze della superficie di un conduttore dipende da " σ ", ovvero la densità di carica superficiale

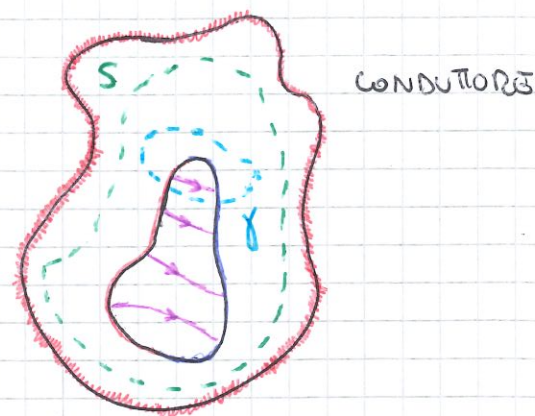
$$\begin{cases} \oint_S \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = \dots = E(r) \cdot A \\ \oint_S \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_s}{\epsilon_0} \end{cases} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



CONDUTTORI CAVI

Consideriamo ora un conduttore cavo e immaginiamo di depositare una carica elettrica, dove si accumula?

Poiché il Teor. di Gauss afferma che il campo elettrico interno alla superficie di un conduttore è nullo, allora la carica totale " Q_s ", contenuta all'interno di una superficie di Gauss fissata, sarà uguale a zero.



Tuttavia la carica totale è limitante e non vieta, ad esempio, che le cariche siano separate sulla superficie interna del conduttore cavo; tali cariche, se esistenti, genererebbero un campo elettrico a sé stante: se però noi poniamo un'altra superficie di Gauss, a intersecare la cavità del conduttore, dobbiamo per forza avere il campo elettrico nullo poiché la circuitazione sulla linea chiusa γ , sottostante la superficie, sarà uguale a zero.

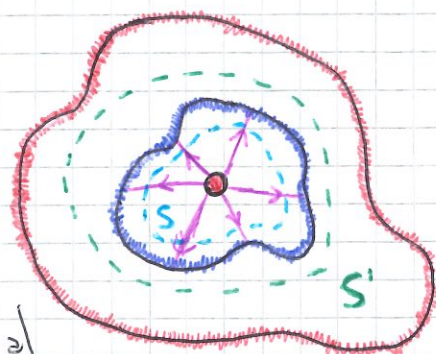
SCHERMI ELETTROSTATICI

Consideriamo un conduttore carico e posizioniamo una carica nella cavità, internamente all'oggetto, dove si accumuleranno le cariche?

Per il Teor. di Gauss il Flusso, e perciò il campo elettrico, all'interno della cavità non sarà uguale a zero e possiederà modulo,

Se però consideriamo una seconda superficie che contenga la cavità con la carica e sia interna al

nostro oggetto, applicando Gauss il campo elettrico al suo interno deve essere nullo ma, poiché sappiamo della presenza di una carica e della precedente sottolineata in giallo, possiamo dedurre la presenza di una carica opposta sulla superficie interna del conduttore cavo. Per un ragionamento analogo col medesimo teorema affermiamo l'induzione della superficie esterna a causa della non inesistente presenza di un campo elettrico.



CAPACITÀ E CONDENSATORI

Per introdurre questo argomento iniziamo considerando una sfera conduttrice e immaginiamo di depositarvi una carica, la quale andrà a distribuirsi sulla superficie esterna dell'oggetto. Si definisce così la CAPACITÀ della sfera conduttrice: (Farad)

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \rightarrow [C] = \frac{[Q]}{[\Delta V]} = \frac{C}{V} = F$$

Questa nuova grandezza rappresenta la capacità di un oggetto di accumulare una quantità di carica "Q" se portato ad un certo potenziale elettrostatico.

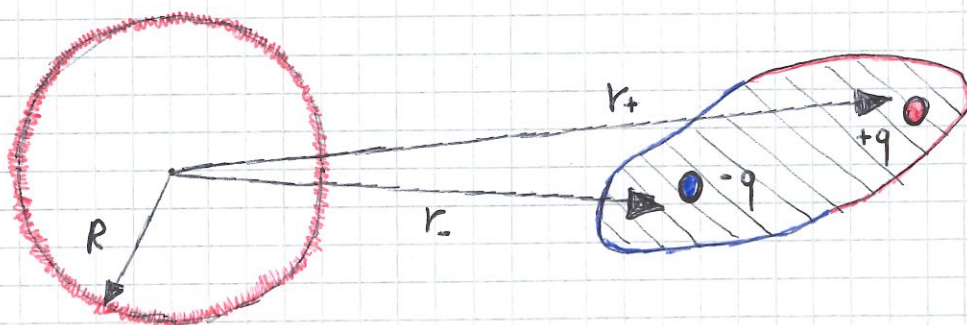
Se sostituiamo la formula del potenziale otteniamo la seguente, per la sfera:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\epsilon_0 R$$

Da ciò si evince che la capacità dipende solo dal raggio, o meglio in generale, dalla sua forma geometrica.

Se ora consideriamo il caso di una sfera in presenza di un secondo conduttore, in induzione, osserveremo che il potenziale elettrostatico della sfera viene modificato.

②



$$\Delta V_2 = \Delta V_1 + \left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_-}\right) + \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_+}\right) \rightarrow \underline{\Delta V_2 < \Delta V_1}$$

Pertanto concludiamo osservando che la capacità di un conduttore aumenta per l'effetto dell'induzione

$$C_2 > C_1$$

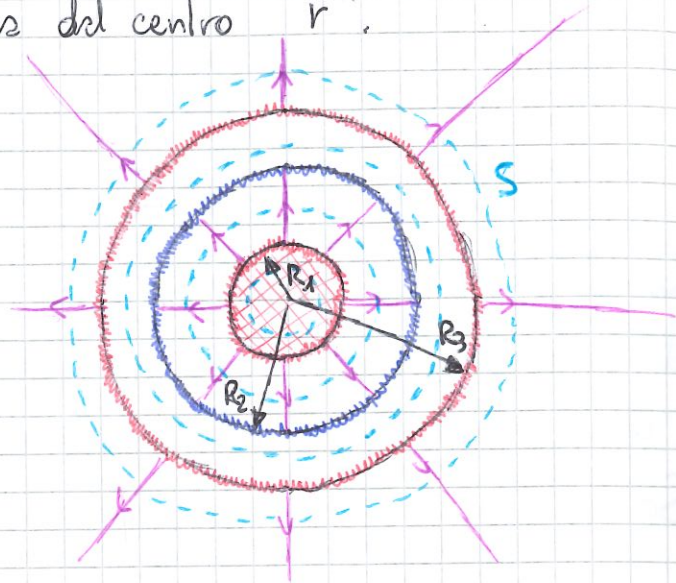
Ora facciamo degli esempi su questi sistemi

CONDENSATORI SFERICI

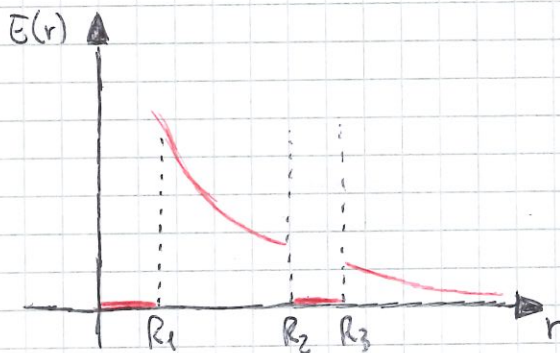
Sapendo che un condensatore è una coppia di conduttori in induzione, calcoliamo il campo elettrico in funzione della distanza del centro "r".

- $0 < r < R_1$: $\vec{E}(r) = 0$
- $R_1 < r < R_2$: $\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$

$$\begin{cases} \oint_S \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = \dots = E(r) 4\pi r^2 \\ \oint_S \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_S}{\epsilon_0} \end{cases}$$



- $R_2 < r < R_3$: $\vec{E}(r) = 0$
- $r > R_3$: $\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$



La differenza di potenziale tra le ARMATURE del condensatore sferico

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(R_1) - V(R_2) = - \int_{R_2}^{R_1} \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

La CAPACITÀ di un condensatore sferico quindi risulterà:

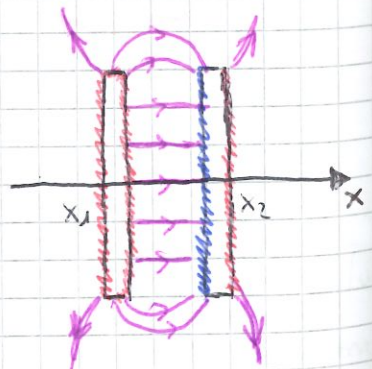
$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

CONDENSATORE PIANO

$$\Delta V = - \int_{x_2}^{x_1} \vec{E}(x) \cdot dx = \dots = - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_{x_2}^{x_1} dx = \dots = - \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

Per tanto la capacità di un condensatore piano sarà:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma/S}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} d} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$



CONDENSATORE CILINDRICO

• $0 < r < R_1$: $\vec{E}(r) = 0$

• $R_1 < r < R_2$: $\vec{E}(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$

$\oint_S \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = \dots = E(r) \cdot 2\pi r \cdot h$

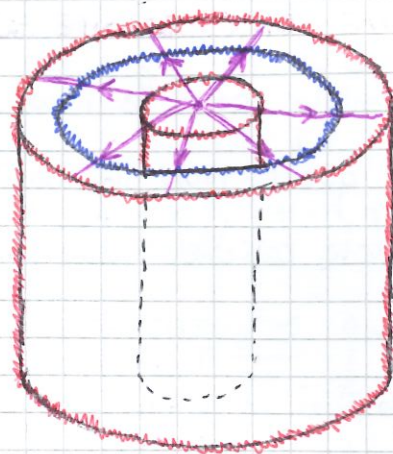
$\oint_S \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_S}{\epsilon_0} = \frac{\lambda \cdot h}{\epsilon_0}$

• $R_2 < r < R_3$: $\vec{E} = 0$

• $r > R_3$: $\vec{E}(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$

• $\Delta V = \dots = - \int_{R_2}^{R_1} \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} = \dots = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

• $C \equiv \frac{Q}{\Delta V} = \dots = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$



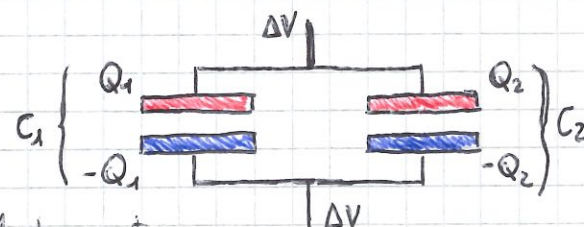
• R_1
• R_2
• R_3

Ora calcoliamo potenziale elettrostatico e capacità con le seguenti:

COLLEGAMENTO DI CONDENSATORI

1) COLLEGAMENTO IN PARALLELO

Se consideriamo: $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$ avremo



$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 \Delta V + C_2 \Delta V = C_{eq} \Delta V$ dove i calcoli portano

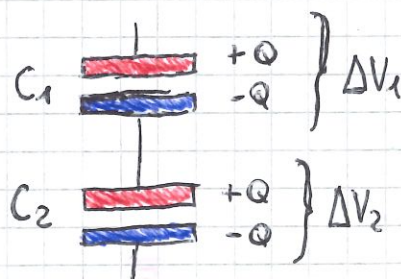
alla risoluzione: $C_{eq} = \sum_{i=1}^N C_i$

2) COLLEGAMENTO IN SERIE

Se consideriamo: $Q_1 = Q_2 = Q$

$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C_{eq}}$ dove i

calcoli portano alla soluzione: $\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$

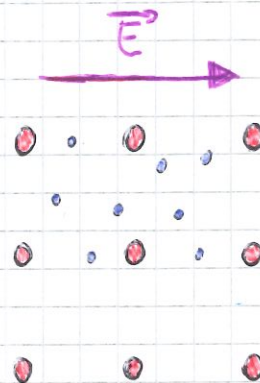
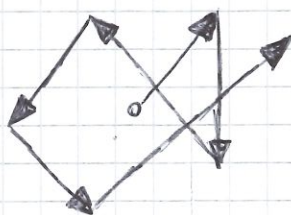


CONDUZIONE DI CORRENTE ELETTRICA

Abbiamo trattato poco fa i conduttori in condizioni di equilibrio, ora parleremo invece di quelli NON in equilibrio in grado di condurre. Al fine di muoversi, le cariche, dovranno essere sottoposte ad un campo elettrico; introduciamo i GENERATORI DI TENSIONE (o di FORZA ELETTROMOTRICE), essi sono dispositivi in grado di mantenere un campo elettrico costante all'interno di un conduttore.

MODELLO DI DRUDE (1906) della conduzione elettrica

Anche in assenza di campo elettrico, gli elettroni si muovono molto rapidamente e urtano contro gli ioni

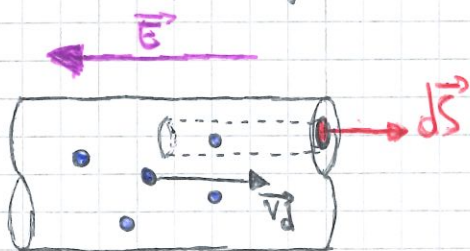


del reticolo e "perdono memoria" della loro velocità prima dell'urto. A causa della natura CASUALE degli urti, la velocità media degli elettroni è nulla. In presenza di un campo elettrico questi elettroni risentiranno di una forza la quale li farà muovere: perciò si dovranno sommare i moti, uno casuale e uno detto di DERIVA, cioè si muoveranno nella direzione opposta del campo. Chiamiamo " τ " il tempo medio che intercorre tra gli urti col reticolo:

$$\begin{cases} \vec{F} = -e\vec{E} \rightarrow \vec{a} = \frac{-e\vec{E}}{m} \\ \vec{v}_d(\tau) = \vec{a}\tau = -\frac{e\vec{E}}{m}\tau \end{cases}$$

dove " τ " è caratteristica del materiale.

Quanta carica passa per una sezione infinitesima nell'intervallo di tempo



$$dQ = -e \cdot n \cdot \Delta t v_d \cdot dS$$

Definiamo così la DENSITÀ DI CORRENTE ELETTRICA come

$$\vec{J} = -e \cdot n \cdot \vec{v}_d = n \frac{e^2 \tau}{m} \vec{E}$$

Stabiliamo così due costanti dipendenti dalle proprietà del materiale

- CONDUCEBILITÀ: " σ "

- RESISTIVITÀ: (" $\frac{1}{\rho}$ ")⁻¹ = " ρ " $\Leftrightarrow \left[\sigma = \frac{1}{\rho} = n \frac{e^2 \tau}{m} \right] (*)$

Scriviamo pertanto la corrente elettrica come:

$$i \equiv \frac{dQ}{dt} = \dots = \vec{J} \cdot d\vec{S},$$

e nel caso di superficie avremo un flusso

$$i \equiv [\Phi_s(\vec{J})] = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{S} \rightarrow [i] = \frac{[Q]}{[dt]} = \frac{C}{s} = A$$

Se inoltre consideriamo una superficie chiusa interna al conduttore otteniamo l'EQUAZIONE DI CONTINUITÀ che, in condizioni STAZIONARIE

$$\oint_s \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \frac{dQ_s}{dt} \equiv 0$$

sarà nulla, uguale a zero.

Da cui derivano:

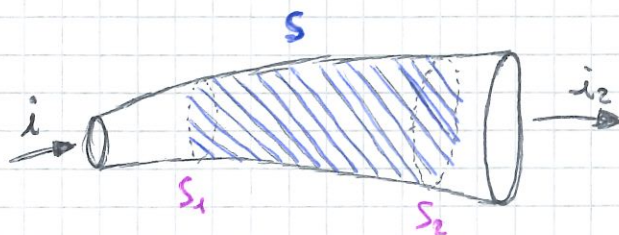
1) \vec{J} (ed anche \vec{E}) non possono avere una componente perpendicolare alla superficie del conduttore, in caso contrario gli elettroni si accumulerebbero sulla parete del conduttore generando a sua volta un altro campo.

2) L'intensità di corrente attraverso la sezione di un conduttore di forma qualunque è COSTANTE

In condizioni stazionarie

$$\oint_s \vec{J} \cdot d\vec{S} \equiv 0$$

$$\oint_s \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{s_1} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{s_2} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$



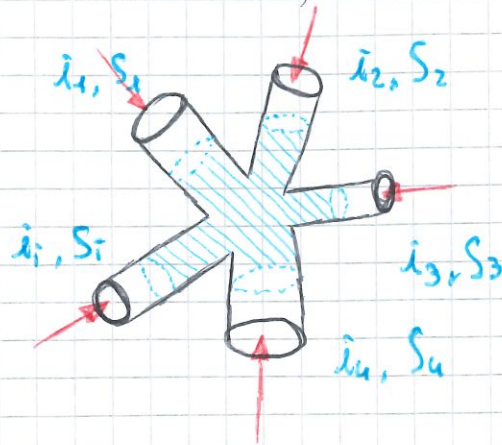
$$\Rightarrow i_1 = \int_{s_1} \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \int_{s_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} = -i_2$$

In generale da ciò si ricava la **LEGGE DI KIRCHHOFF** delle intensità di corrente, la quale sarà: (CONDIZIONI STAZIONARIE)

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0$$



$$\sum_{i=1}^n i_i = 0$$

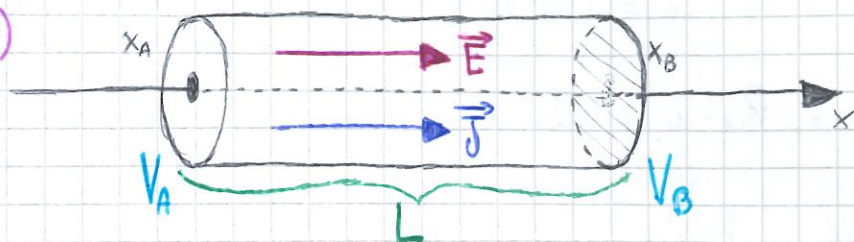


RESISTENZA ELETTRICA

Nel caso di un conduttore di forma regolare, con \vec{J} ed \vec{E} uniformi all'interno dell'oggetto avremo:

$$i = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \dots = \frac{E}{\rho} S \quad (*)$$

$$\vec{J} = \frac{i}{S} = \dots = \frac{E}{\rho} = \sigma E$$



dove " σ " e " ρ " sono rispettivamente CONDUCEBILITÀ e RESISTIVITÀ. Considerando poi i potenziali avremo:

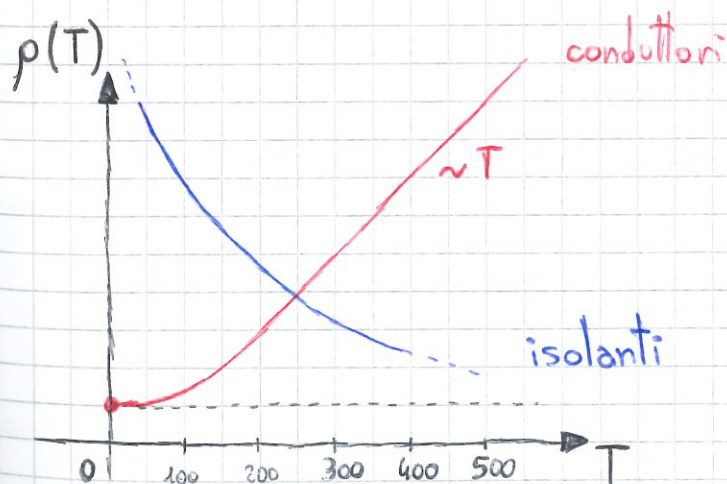
$$\Delta V = V_A - V_B = - \int_B^A \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} = \dots = E (x_B - x_A) = E \cdot L$$

Perciò il precedente diventa:

$$\Delta V = \left(\rho \frac{L}{S} \right) i = \underline{R} \cdot i \quad \longrightarrow \quad [R] = \Omega$$

La formula appena scritta viene chiamata **LEGGE DI OHM** e la grandezza appena definita si chiama RESISTENZA

VARIATIONE DELLA RESISTIVITÀ CON LA TEMPERATURA



Ad alte temperature l'andamento della resistività è scandito così:

$$\rho(T) = \rho(T_0) \cdot [1 + \alpha(T - T_0)]$$

con " α " COEFFICIENTE TERMICO.

Queste dipendenze termiche derivano dall'agitazione del reticolo di ioni nella struttura del conduttore/isolante.

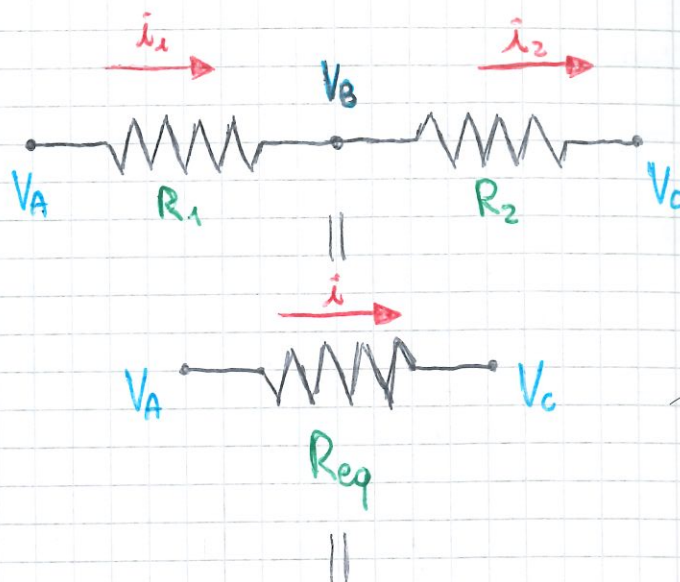
CONNESSIONE DI RESISTORI

i) COLLEGAMENTI IN SERIE:

$$\Delta V = V_A - V_C = (V_A - V_B) + (V_B - V_C)$$

$$= R_1 \cdot i + R_2 \cdot i = (R_1 + R_2) \cdot i$$

dove " $R_{eq} = \sum_i R_i$ "

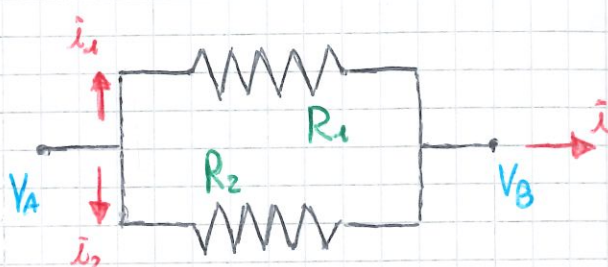


ii) COLLEGAMENTI IN PARALLELO:

$$i = i_1 + i_2 = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} =$$

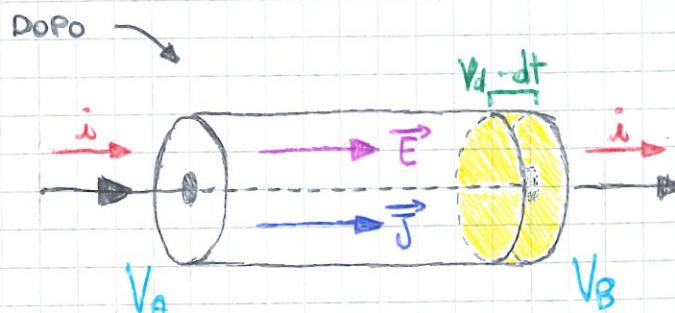
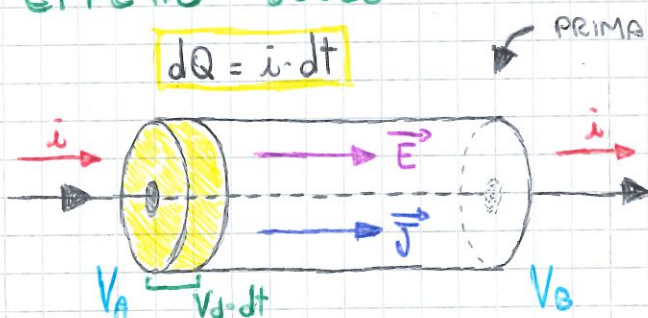
$$= \Delta V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

dove " $\frac{1}{R_{eq}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$ "



EFFETTO JOULE

$$dQ = i \cdot dt$$



Consideriamo questa struttura e ricordiamo " $\Delta V = V_A - V_B = R \cdot i$ ", allora:

$$\Delta E = E_B - E_A = (K_B + U_B) - (K_A + U_A) \quad \text{con } K_B = K_A, v_j = \text{costante}$$

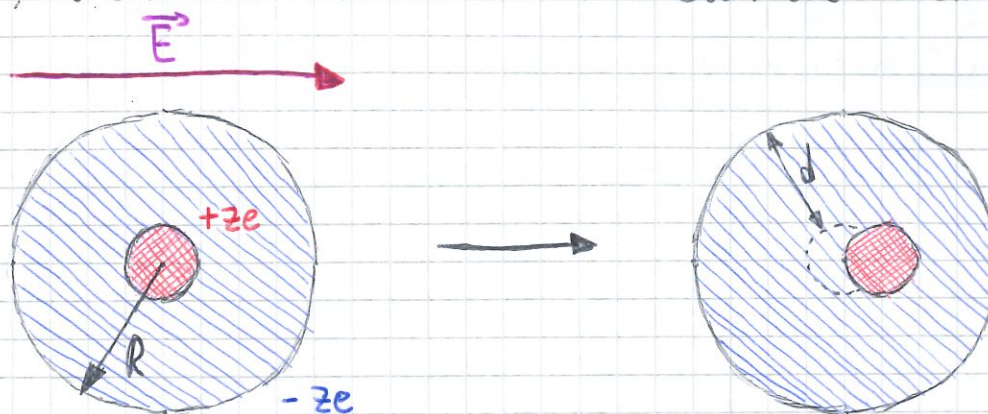
$$\dots = U_B - U_A = \Delta U = dQ \cdot \Delta V = (i \cdot dt) \cdot (R \cdot i) = R \cdot i^2 \cdot dt = L^{nc}$$

Abbiamo così ricavato il lavoro delle forze non conservative, ma la **POTENZA**:

$$W = \frac{dL^{nc}}{dt} = R i^2 = \Delta V i$$

MATERIALI DIELETTRICI (o ISOLANTI)

In un metallo immerso in un campo elettrico l'interno del materiale ne sarà privo, tuttavia nei materiali dielettrici osserveremo altro:



Il baricentro delle cariche negative non coincide più con quello delle cariche positive. Il nucleo decentrato perciò sperimenta una forza dovuta al campo elettrico generato dalla distribuzione di carica negativa che tende a riportarlo nella sua posizione di equilibrio.

Avendo già svolto l'esempio (SFERA PIENA) avremo:

$$\vec{E}_{el}(r) = \frac{\rho_{el} \cdot r}{3\epsilon_0} = \dots = -\frac{ze \cdot r}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad \text{con } Q = ze, (0 < r < R)$$

All'equilibrio invece i campi elettrici interno ed esterno devono essere opposti:

$$-\vec{E} = \vec{E}_{el} = -\frac{ze \cdot d}{4\pi\epsilon_0 R^3} \Leftrightarrow \vec{d} = \left(\frac{4\pi\epsilon_0 R^3}{ze} \right) \vec{E}$$

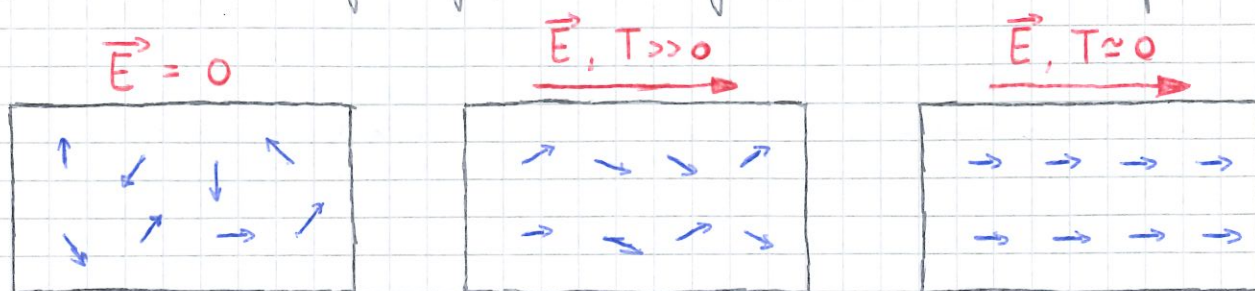
Per tanto si formerà un DIPOLO ELETTRICO il cui, più usata come grandezza, MOMENTO DI DIPOLO ELETTRICO è:

$$\vec{p} = ze \cdot \vec{d} = (4\pi\epsilon_0 R^3) \vec{E} = \left(\epsilon_0 \frac{\chi_{el}}{n} \right) \vec{E}$$

con " χ_{el} " e " n " sono rispettivamente la SUSCETTIVITÀ ELETTRICA e la DENSITÀ DI ATOMI NEL MATERIALE.

In generale possiamo dire che quando un isolante viene inserito in un campo elettrico, i suoi atomi, sviluppano un momento di dipolo elettrico.

In altri materiali, detti molecolari, i dipoli elettrici possono essere intrinseci e presenti a prescindere che ci sia o meno un campo elettrico. Comunque non tutte le molecole sono dotate di momento, ora osserviamo l'andamento del campo rispetto alla temperatura ma anche i dipoli:



In generale un materiale può presentare sia dipoli indotti che intrinseci (polari):

$$\vec{P} = \vec{P}_{el} + \langle \vec{P}_p \rangle = \epsilon_0 \frac{\chi_{el} + \chi_p(T)}{n} \vec{E} = \epsilon_0 \frac{\chi(T)}{n} \vec{E}$$

dove " $\chi(T) = \chi_{el} + \chi_p(T)$ " è la suscettività elettrica totale.

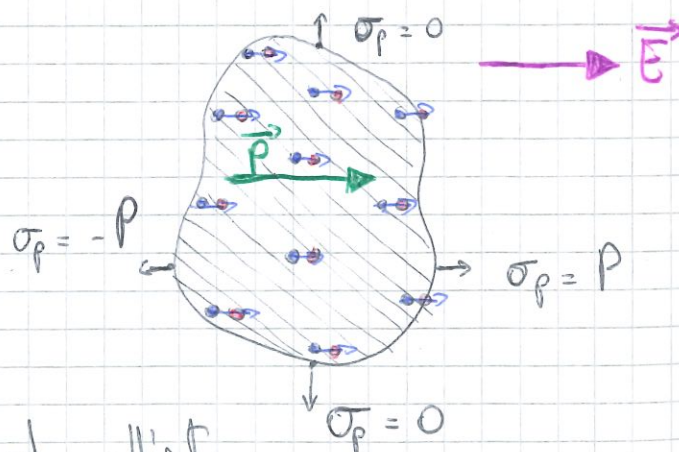
A livello macroscopico invece dobbiamo introdurre il vettore POLARIZZAZIONE che descrive i momenti di dipolo in ampiezza e densità

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{V} = \frac{N \vec{p}}{V} = n \vec{p} = n \frac{\epsilon_0 \chi}{n} \vec{E} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

Sulle superfici di un materiale polarizzato si accumula una carica

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

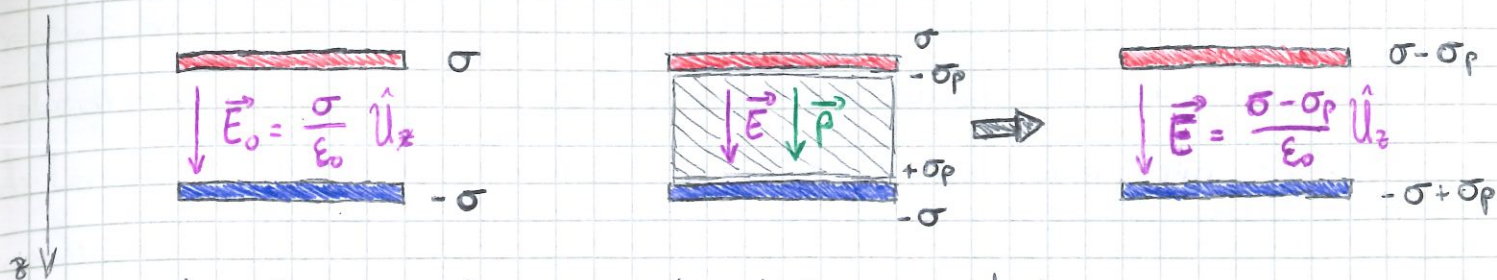
abbiamo appena definito la
DENSITÀ DI CARICA SUPERFICIALE
DI POLARIZZAZIONE.



Si può dimostrare che non vi sono cariche all'interno di un corpo omogeneo, in particolare

$$Q_{s,p} = - \int_V \vec{P} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \int_V \vec{P} \cdot d\vec{S} = 0$$

CONDENSATORE CON DIELETTRICO



Considerando le relazioni matematiche precedenti avremo:

$$\sigma_p = \epsilon_0 \cdot \chi \cdot \vec{E} \cdot \hat{u}_z = \chi (\sigma - \sigma_p) \Rightarrow \sigma_p = \sigma \frac{\chi}{\chi + 1}$$

allora introduciamo la COSTANTE DIELETTRICA RELATIVA " ϵ_r " con

$$\vec{E} = \frac{\sigma - \sigma_p}{\epsilon_0} \hat{u}_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{1}{\chi + 1} \hat{u}_z = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r} \quad \text{con } \epsilon_r > 1$$

Analogamente varieranno le altre grandezze

$$\Delta V = \frac{\Delta V_0}{\epsilon_r} (< \Delta V_0) ; \quad C = \frac{Q}{\Delta V} = \epsilon_r C_0 (> C_0)$$

Partendo dal teorema di Gauss possiamo dimostrare:

$$\oint (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = Q_{s,e} \rightarrow \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{s,e}$$

dove " $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ " è il VELORE SPOSTAMENTO ELETTRICO, tenendo conto poi delle trasformazioni precedenti abbiamo:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 (\chi + 1) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

EQUAZIONI DI MAXWELL per il
CAMPO ELETTROSTATICO NELLA MATERIA



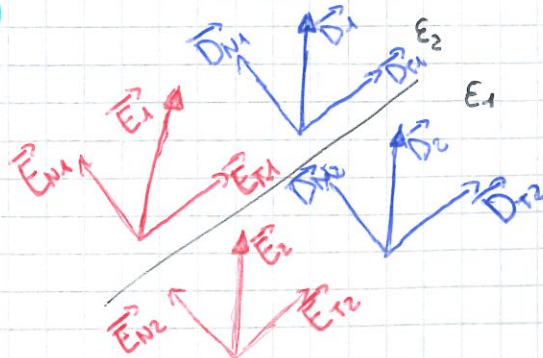
$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{s,e}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

CONDIZIONI AL CONFINIO per \vec{E} e \vec{D}

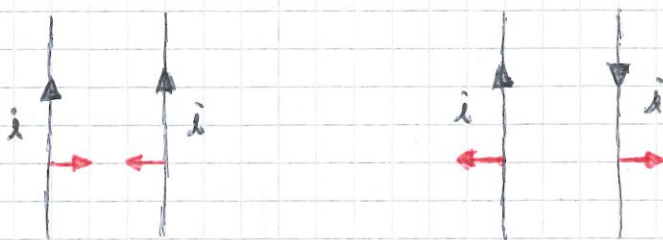
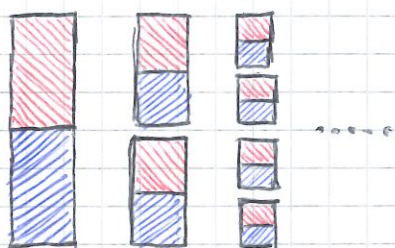
Si può dimostrare che:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{T1} = E_{T2} \Rightarrow \frac{D_{T1}}{\epsilon_1} = \frac{D_{T2}}{\epsilon_2} \\ \epsilon_1 E_{N1} = \epsilon_2 E_{N2} \Rightarrow D_{N1} = D_{N2} \end{array} \right.$$

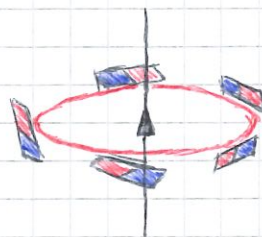


MAGNETISMO E MAGNETOSTATICA

A differenza dell'elettrostatica, nel magnetismo non è possibile isolare il MONOPOLO MAGNETICO, ad esempio separando polo nord da polo sud, quando era invece possibile farlo con la carica puntiforme (monopolo elettrico). Pertanto l'approccio usato per descrivere il campo elettrico non sarà lo stesso usato per il campo magnetico. L'ELETTROSTATICA ha a che fare con le cariche, la MAGNETOSTATICA con le cariche in moto.



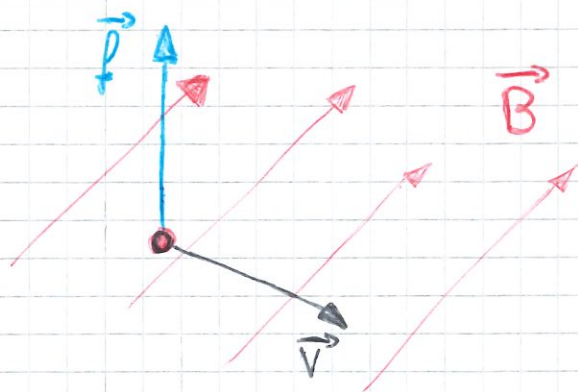
Il primo in grado di capire qualcosa su questo fenomeno è stato LORENTZ, egli ha scoperto l'omonima:



FORZA DI LORENTZ

Tale forza è un prodotto vettoriale ed è strettamente dipendente dalla direzione di " \vec{v} ", " \vec{B} " e dalla carica, positiva o negativa:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$



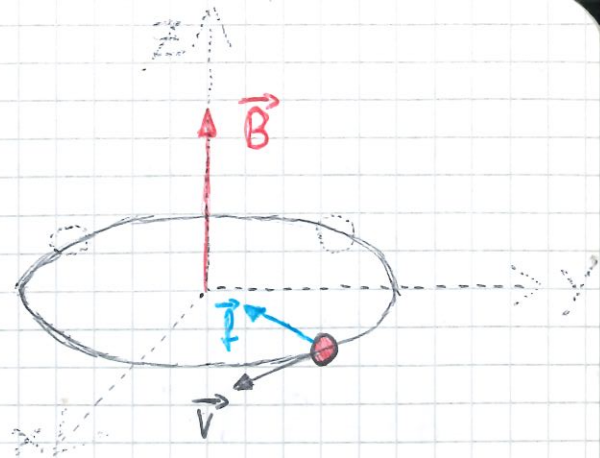
Inoltre il lavoro, infinitesimo e non, compiuto da tale forza è nullo poiché nella seguente, " \vec{F} " verrà moltiplicata vettorialmente a " \vec{v} " perpendicolare:

$$\bullet \quad \delta L = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (q \cdot \vec{v} \times \vec{B}) \cdot (\vec{v} \cdot dt) = 0$$

quindi la forza compirà lavoro nullo su un tratto finito di traiettoria:

$$L = \int_A^B \delta L = 0$$

Per una particella carica in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme, la forza di Lorentz, è la forza centripeta che mantiene la carica in moto circolare uniforme nel piano "1" e "3".



Quanto varrà il raggio della traiettoria seguita?

Eguagliamo la forza di Lorentz con quella centripeta, otteniamo

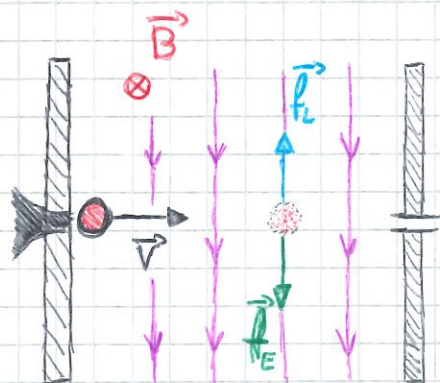
$$F_c = F_L \Rightarrow -m \frac{v^2}{R} = -qvB \Rightarrow R = \frac{mv}{qB}$$

Il periodo, e sua volta, sarà

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \dots = \frac{2\pi m}{qB}$$

ESEMPIO:

$$\begin{aligned} F_E &= F_L \quad \text{quindi} \\ \Downarrow \\ qE &= qvB, \quad \text{troviamo la velocità:} \\ \Downarrow \\ v &= \frac{E}{B} \end{aligned}$$



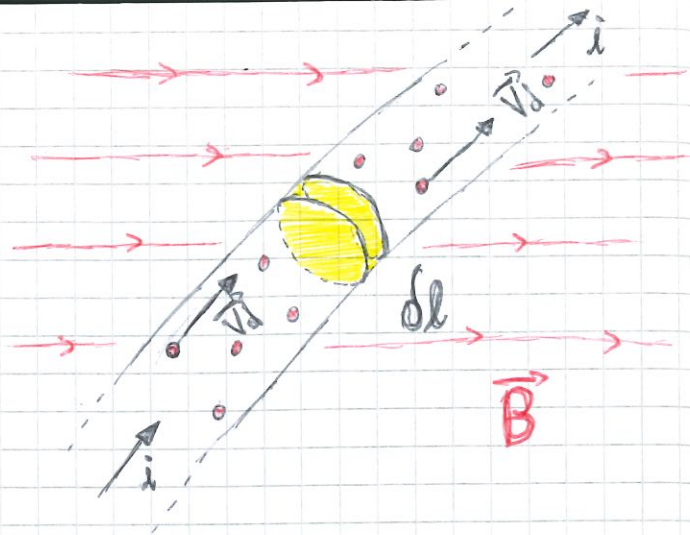
SECONDA LEGGE ELEMENTARE DI LAPLACE

Questa legge fisica è detta "elementare" poiché implica quantità infinitesime. Per studiarla sappiamo che all'interno di un conduttore percorso da corrente, su ciascun portatore di carica, agisce una forza. Analizzeremo così l'esempio di un filo conduttore considerando una sezione di esso contenente diverse cariche, descritte dalla "n" che sarebbe la densità di portatori di carica. Consideriamo anche:

$$J = n \cdot q \cdot v_d \quad ; \quad i = \int J \cdot dS = J S$$

Teniamo a mente la struttura del filo percorso da corrente e una sua relativa sezione infinitesima di volume:

$$\delta V = S \cdot \delta l$$



Svolgiamo i calcoli e ricaviamo

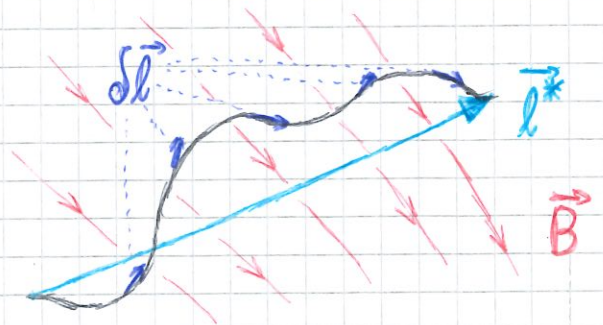
la SECONDA LEGGE ELEMENTARE DI LAPLACE:

$$\delta \vec{F} = n \cdot \delta V \cdot q \vec{v}_d \times \vec{B} = \vec{J} \times \vec{B} \cdot \underline{S \cdot \delta l} = \underline{i \cdot \delta \vec{l} \times \vec{B}}$$

Ora consideriamo un filo intero e anche il caso con " \vec{B} " uniforme:

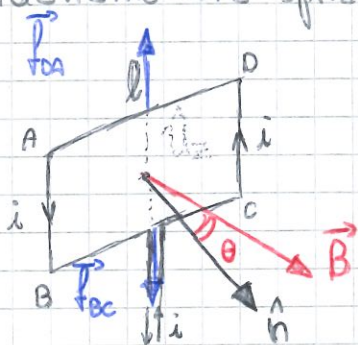
$$\bullet \vec{F} = \int_{\text{filo}} \delta \vec{F} = \int_{\text{filo}} i \underline{\delta \vec{l} \times \vec{B}}$$

$$\bullet \vec{F} = \int_{\text{filo}} i \underline{\delta \vec{l} \times \vec{B}} = \dots = i \underline{\vec{l}^* \times \vec{B}}$$



SPIRA (QUADRATA) PERCORSA DA CORRENTE

Consideriamo una spira immersa in un campo magnetico, le forze saranno:

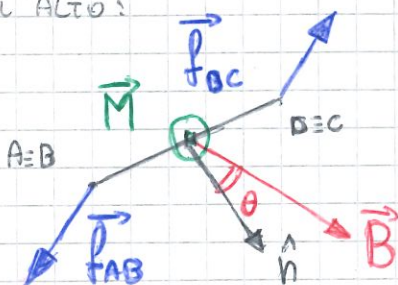


$$|\vec{F}_{AB}| = |\vec{F}_{CD}| = i \cdot l \cdot B$$

$$|\vec{F}_{BC}| = |\vec{F}_{DA}| = i \cdot l \cdot B \cdot \sin \theta$$

La risultante delle forze è nulla, ma non il momento:

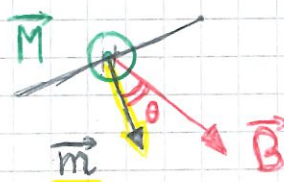
DALL'ALTO:



$$\underline{\vec{M}} = i l^2 B \sin \theta \hat{U}_z = i S B \sin \theta \hat{U}_z = \underline{\vec{m} \times \vec{B}}$$

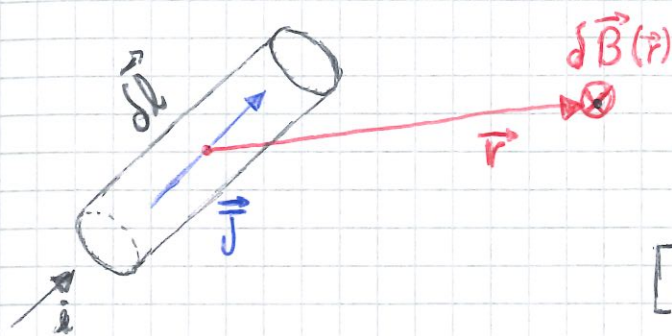
dove " $\underline{\vec{m}} = i \cdot S \cdot \hat{n}$ " è il MOMENTO MAGNETICO della spira considerata: (DI DIPOLO)

DALL'ALTO:



PRIMA LEGGE ELEMENTARE DI LAPLACE

Dal risultato di molteplici osservazioni sperimentali è stato possibile ricavare una formula che lega il campo magnetico alle sue sorgenti, ovvero le cariche in moto, o meglio alle distribuzioni di corrente elettrica. Troviamo quindi il valore del campo magnetico, rispetto ad un segmento infinitesimo di filo, in un punto generico dello spazio.



Definiamo il Tesla "T" e esplichiamo la PERMEABILITÀ MAGNETICA DEL VUOTO:

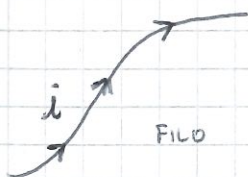
$$[B] = \frac{[F]}{[q][v]} = \frac{N \cdot s}{C \cdot m} = T$$

$$\text{con } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$$

Fatte le dovute premesse possiamo scrivere la formula di Laplace:

$$[\delta \vec{B}(\vec{r})] = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{J} \times \hat{u}_r}{r^2} \cdot \delta l = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot i \frac{\delta \vec{l} \times \hat{u}_r}{r^2} \right]$$

Considerando un filo conduttore finito avremo:



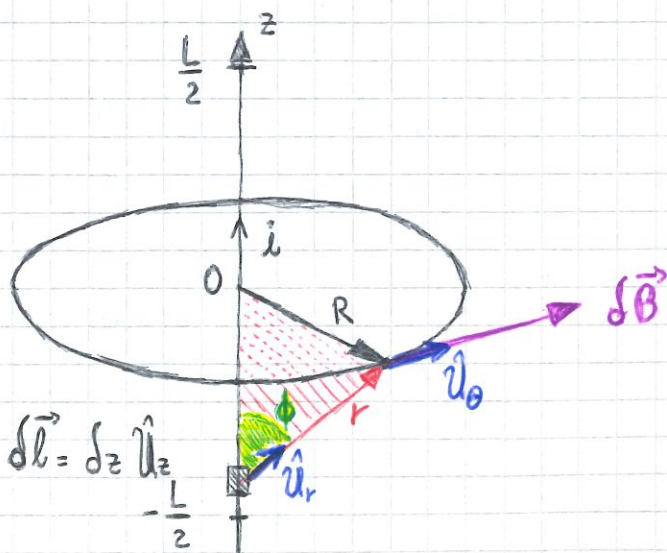
$$\vec{B}(\vec{r}) = \int \delta \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot i \cdot \int_{\text{filo}} \frac{\delta \vec{l} \times \hat{u}_r}{r^2}$$

ESEMPIO:

$$\delta \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot i \frac{\delta \vec{l} \times \hat{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot i \frac{\delta z \hat{u}_z \times \hat{u}_r}{r^2}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot i \frac{\delta z \cdot \sin \phi}{r^2} \hat{u}_\theta$$

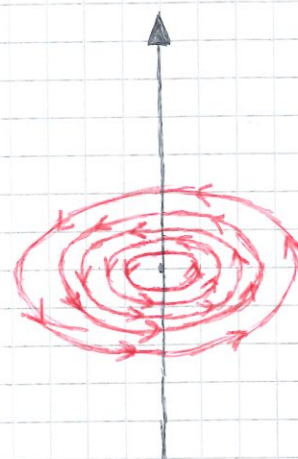
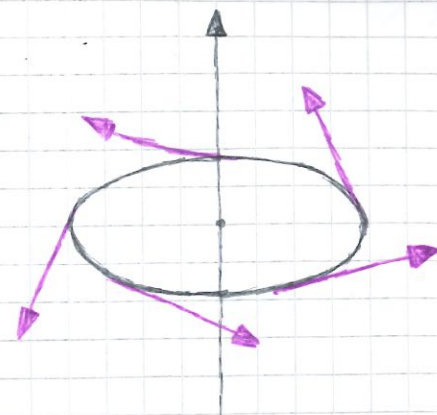
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot i \frac{\delta z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{u}_\theta$$



Il campo magnetico totale che osserveremo sarà l'integrale, ovvero la somma, dei contributi infinitesimi:

$$\underline{\vec{B}} = \int \delta \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i R \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{dz}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{u}_0$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i}{R} \frac{L}{\sqrt{(\frac{L}{2})^2 + R^2}} \hat{u}_0$$



Osserviamo ora cosa succede per $L \rightarrow \infty$,
scriviamo la **LEGGE DI BIOT-SAVART**

$$\underline{\vec{B}}(r) = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi r} \hat{u}_0$$

Si nota subito che le linee del campo magnetico sono CHIUSE, ciò implica che la circuitazione su una qualsiasi linea chiusa " γ " sia diversa da zero, ma lo vedremo meglio con il Teorema di Ampere.

ESEMPIO: (SPIRA)

Consideriamo una spira circolare percorsa da corrente

$$\delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{|\delta \vec{l} \times \hat{u}_r|}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\delta l}{r^2}$$

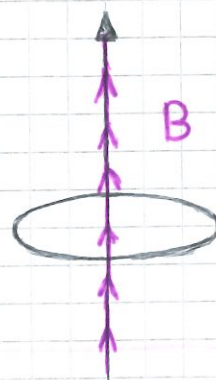
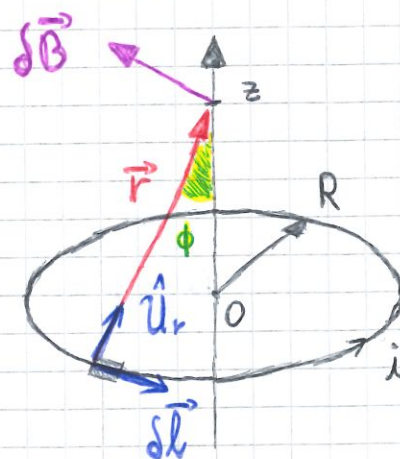
da cui la componente lungo l'asse z :

$$\delta B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\delta l}{r^2} [\cos \phi] = \frac{\mu_0}{4\pi} i \delta l \frac{R}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

Allora il campo magnetico Totale sarà

$$B_z = \int \delta B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{R}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \int_{\text{spira}} \delta l =$$

$$= \frac{\mu_0 \cdot i}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$



ESEMPIO: (SOLENOIDE)

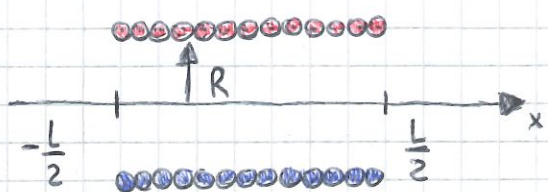
Utilizziamo, linearmente al PRINCIPIO DI EQUIVALENZA DI AMPÈRE, il modello del solenoide a nostro vantaggio. Questo principio afferma che una spirale percorsa da corrente si comporta come un magnete.

Il campo all'interno della struttura è

$$\vec{B}(x=0) = \frac{\mu_0 i}{2} n \frac{L}{\sqrt{(\frac{L}{2})^2 + R^2}} \hat{u}_x$$

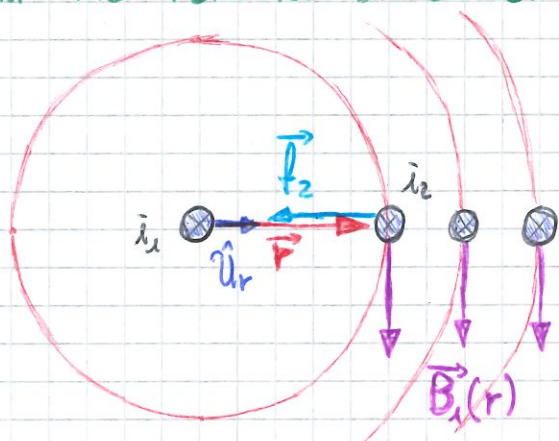
dove "n" è la densità di spire per unità di lunghezza: $[m^{-1}]$

Nel caso $L \rightarrow \infty$: $\vec{B} = \mu_0 i n \hat{u}_x$



FORZA TRA FILI PERCORSI DA CORRENTE

DALL'ALTO:



Teniamo sempre a mente la formula precedente del campo magnetico:

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{u}_\theta$$

La forza che agisce sul filo n°2 è data da

$$\vec{F}_2 = i_2 \vec{l}_2^* \times \vec{B}_1 = -i_2 \cdot l_2^* B_1 \hat{u}_r = -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r} l_2^* \hat{u}_r$$

si introduce così una densità, o meglio una forza per unità di lunghezza

$$\frac{\vec{F}_2}{l_2^*} = -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r} \hat{u}_r$$

per il principio di azione e reazione avremo poi

$$\vec{F}_1 = i_1 \vec{l}_1^* \times \vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r} l_1^* \hat{u}_r$$

TEOREMA DI AMPERE

Questo importante teorema della magnetostatica è applicabile e deriva da una distribuzione di correnti elettriche ad alta simmetria, dove si considera una linea chiusa " γ ". Il teorema afferma che la CIRCUITAZIONE del CAMPO MAGNETICO su di essa sarà:

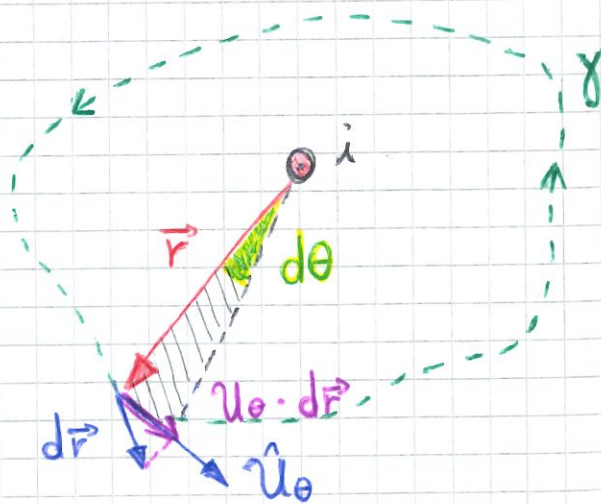
$$\oint_{\gamma} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \mu_0 i_c$$

pertanto non sarà nulla, dato che il campo magnetico non è conservativo, e il suo valore sarà dato da " μ_0 " moltiplicata per le correnti concatenate a " γ " chiamate " i_c ", ovvero la somma delle intensità di corrente inglobate nella linea chiusa considerata.



Per **DIMOSTRARE** il precedente teorema consideriamo il caso più banale possibile, ovvero quello di un singolo filo percorso da corrente; Tuttavia dovremo distinguere due casi, in ordine: la linea chiusa concatena il filo e la linea chiusa che non concatena il filo. Perciò:

$$\begin{aligned} 1) \oint_{\gamma} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \oint_{\gamma} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{u}_{\theta} \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{\hat{u}_{\theta} \cdot d\vec{r}}{r} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint_{\gamma} d\theta \\ &= \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot 2\pi = \mu_0 i \end{aligned}$$



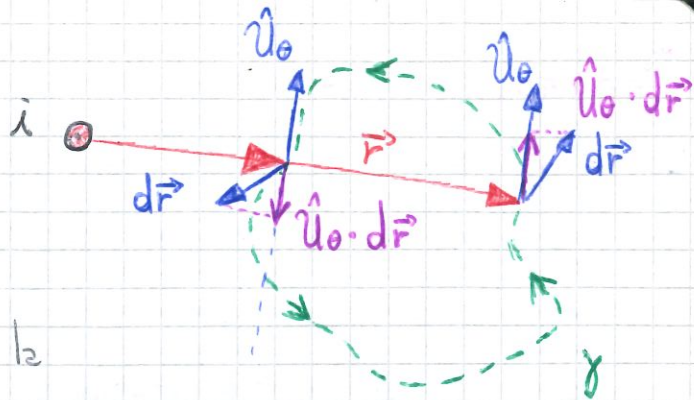
Si osserva dal disegno come:

- il prodotto scalare tra " \hat{u}_{θ} " e " $d\vec{r}$ " è la traslazione/proiezione del secondo sul primo
- tale risultato diviso per il vettore posizione genera un segmento / spazio infinitesimo relativo all'angolo sottendente

$$\oint_{\gamma} d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

$$2) \oint \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \oint \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \cdot \hat{u}_\theta \cdot d\vec{r}$$

$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint \frac{\hat{u}_\theta \cdot d\vec{r}}{r} = 0$$

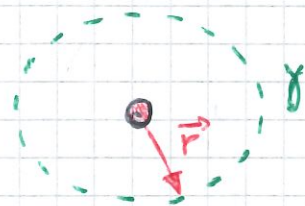


Già accade perché, dal momento che la linea chiusa non contiene il filo conduttore, si verranno a generare due contributi opposti sulla linea "γ". Tali vettori risultanti si annulleranno a due a due lungo l'intero perimetro.

ESEMPIO: (SIMMETRIA CILINDRICA)

Ricordiamo due formule fondamentali:

$$\vec{B}(\vec{r}) = B(r) \cdot \hat{u}_\theta ; \oint \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \mu_0 i$$



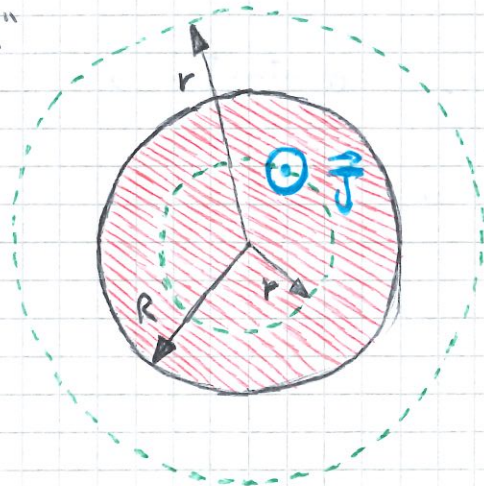
allora consideriamo un filo conduttore e avremo una serie di calcoli che ci ricondurranno alla legge di BIOT-SAVART:

$$\oint \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = B(r) \oint \hat{u}_\theta \cdot d\vec{r} = \dots = B(r) \int_0^{2\pi} r \cdot d\theta = B(r) \cdot 2\pi r$$

Con le precedenti si ricava poi: $B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$

ESEMPIO: (SIMMETRIA CILINDRICA)

Consideriamo un filo conduttore di sezione "S" percorso da densità di correnti " \vec{J} " uniforme e poniamo due linee chiuse a diverso raggio:



1) $r > R$: con " $i = J \cdot S = J \pi R^2$ "

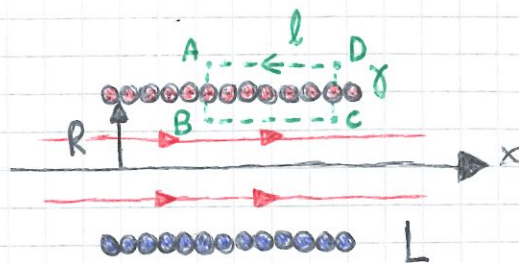
$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 J \pi R^2 \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 J R^2}{2 \cdot r}$$

2) $0 < r < R$:

$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 J \pi r^2 \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0}{2} J \cdot r$$

ESEMPIO: (LINEARE - CIRCOLARE)

Consideriamo un solenoido infinito con " $L \gg R$ ". Scegliamo la linea chiusa che chiameremo " γ " come in figura e calcoliamo la relativa CIRCUITAZIONE. Ricordiamo



inoltre che il campo magnetico "esiste" solamente all'interno del solenoide.

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \int_A^B \dots + \int_B^C \dots + \int_C^D \dots + \int_D^A \dots = 0 + \int_B^C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + 0 + 0 \\ &= \int_B^C B(r) \cdot dx = B(r) \cdot l = B \cdot l \end{aligned}$$

$$\oint_{\gamma} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \mu_0 i_c(n) = \mu_0 n l \cdot i$$

$$\Rightarrow B \cdot l = \mu_0 n l \cdot i \Rightarrow \boxed{B = \mu_0 n \cdot i}$$

EQUAZIONI DI MAXWELL PER IL CAMPO ELETTROMAGNETICO (STATICO) NEL VUOTO

Campo elettrostatico

$$\begin{cases} \oint_{\gamma} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 & \text{IRROTAZIONALITÀ DEL CAMPO ELETTRICO} \\ \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_S}{\epsilon_0} & \text{TEOREMA DI GAUSS} \end{cases}$$

Campo magnetostatico

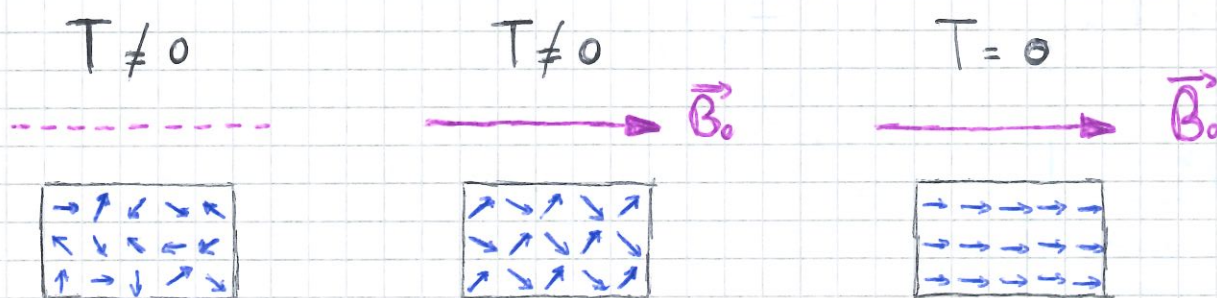
$$\begin{cases} \oint_{\gamma} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \mu_0 i_c & \text{NON IRROTAZIONALITÀ DEL CAMPO MAGNETICO} \\ \oint_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0 & \text{FLUSSO ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE} \end{cases}$$

IL MAGNETISMO NELLA MATERIA

Rispetto alle proprietà magnetiche, distinguiamo materiali DIAMAGNETICI, PARAMAGNETICI, FERROMAGNETICI. Quando un elettrone ruota attorno ad un nucleo si comporta come una spirale in miniatura simulando il dipolo magnetico. Inoltre atomi con "gusci" pieni e totalmente occupati non possiedono momento magnetico perché si compensano i dipoli, ma in generale:

$$\vec{M} = \vec{M}_d + \langle \vec{M}_p \rangle = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\chi_d + \chi_p(T)}{n} \cdot \vec{B}_0$$

dove "X" sono le suscettività diamagnetiche e paramagnetiche (in funzione della temperatura). Questa dipendenza dall'energia cinetica dei dipoli deriva dal fatto che più ne hanno, più possono muoversi:



Inoltre, un materiale si dice in diversi modi

- DIAMAGNETICO se $|\chi_d| > |\chi_p|$, $\chi_m < 0$
- PARAMAGNETICO se $|\chi_d| < |\chi_p|$, $\chi_m > 0$

Nel caso FERROMAGNETICO invece la suscettività in funzione del tempo è molto maggiore di zero, essa dipende dalla "storia" del materiale stesso (ISTERESI).

Introduciamo ora una nuova grandezza fisica che descrive un fenomeno che si manifesta in alcuni materiali in presenza di un campo magnetico, e attraverso il quale è possibile descrivere il magnetismo nella materia.

MAGNETIZZAZIONE

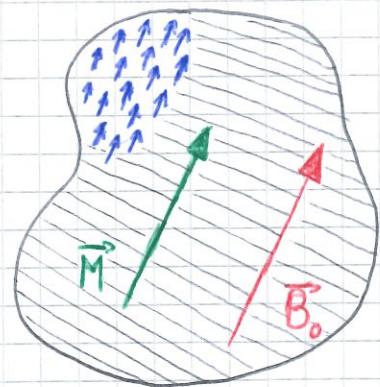
A livello macroscopico è la sommatoria di tutti gli infinitesimi dipoli magnetici normalizzata al volume del solido considerato:

$$\vec{M} \equiv \frac{1}{V} \sum_i \vec{m}_i = \frac{N}{V} \vec{m} \dots$$

secondo le trasformazioni precedenti

$$\dots = n \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi_m}{n} \vec{B}_0 = \frac{1}{\mu_0} \chi_m \vec{B}_0$$

dove $[\vec{M}] = \frac{A}{m}$.



Possiamo considerare tantissimi momenti di dipolo magnetici, come in figura sopra, e vederli come piccole spire percorse da corrente. Tuttavia sappiamo che all'interno del solido queste correnti si annullano, ma NON sulla SUPERFICIE. Pertanto, la mancata compensazione superficiale

di queste correnti poste sulla superficie, può essere vista come un generarsi di un'altra corrente, analizzata come densità della stessa, detta AMPERIANA. Questa densità sarà lineare e varrà:

$$\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{n} \quad \text{con} \quad [J_{ms}] = \frac{A}{m}$$

dove " \hat{n} " è la NORMALE in ogni punto della superficie solida.

Ora, svolgendo dei calcoli, definiamo una nuova grandezza molto importante nel calcolo del campo magnetico attraverso un materiale di natura diversa dal vuoto e chiamiamola:

PERMEABILITÀ MAGNETICA RELATIVA

Consideriamo il caso di un solenoide vuoto e uno contenente un cilindro di materiale magnetico, osserviamo quindi:

$$\bullet \quad \underline{\vec{B}_0} = \mu_0 n \cdot i_c \hat{U}_x = \underline{\mu_0 J_c \hat{U}_x}$$

$$\bullet \quad \underline{\vec{M}} = \frac{1}{\mu_0} \chi_m \vec{B}_0 = \frac{1}{\mu_0} \chi_m \mu_0 J_c \hat{U}_x = \underline{\chi_m J_c \hat{U}_x}$$

Quindi avremo che scorreranno delle correnti AMPERIANE di modulo

$$|\vec{J}_{ms}| = |\vec{M} \times \hat{n}| = |\vec{M}| = \chi_m J_c$$

Perciò, il campo magnetico all'interno del solenoide, in presenza di un materiale magnetico, è attraversato da una corrente " J_c ", equivale al campo magnetico di un solenoide vuoto percorso da corrente " $J_c + J_{ms}$ ":

$$\vec{B} = \mu_0 (J_c + J_{ms}) \hat{U}_x = \mu_0 (J_c + \chi_m J_c) \hat{U}_x = \mu_0 (1 + \chi_m) J_c \hat{U}_x$$

$$= \dots = \mu_0 \underline{\mu_r} J_c \hat{U}_x = \underline{\mu_r \vec{B}_0}$$

dove " μ_r " è la grandezza che cercavamo e notiamo che un materiale:

- DIAMAGNETICO: $\mu_r < 1$ poiché $\chi_m < 0$

- PARAMAGNETICO: $\mu_r > 1$ poiché $\chi_m > 0$

CAMPO MAGNETIZZANTE

Ricerchiamo questa nuova grandezza partendo da una formula che non conoscevamo e tramite il Teorema di Ampere calcoliamo:

$$\bullet \quad \oint \vec{M}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = i_m \quad \text{dove "i_m" sono le correnti superficiali}$$

$$\bullet \quad \oint \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \mu_0 (i_c + i_m) \dots \oint [\vec{B}(\vec{r}) + \mu_0 \vec{M}(\vec{r})] \cdot d\vec{r} = \mu_0 i_c \dots$$

$$\dots \oint \underline{\vec{H}} \cdot d\vec{r} = \oint \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} + \vec{M} \right) \cdot d\vec{r} = \underline{i_c}$$

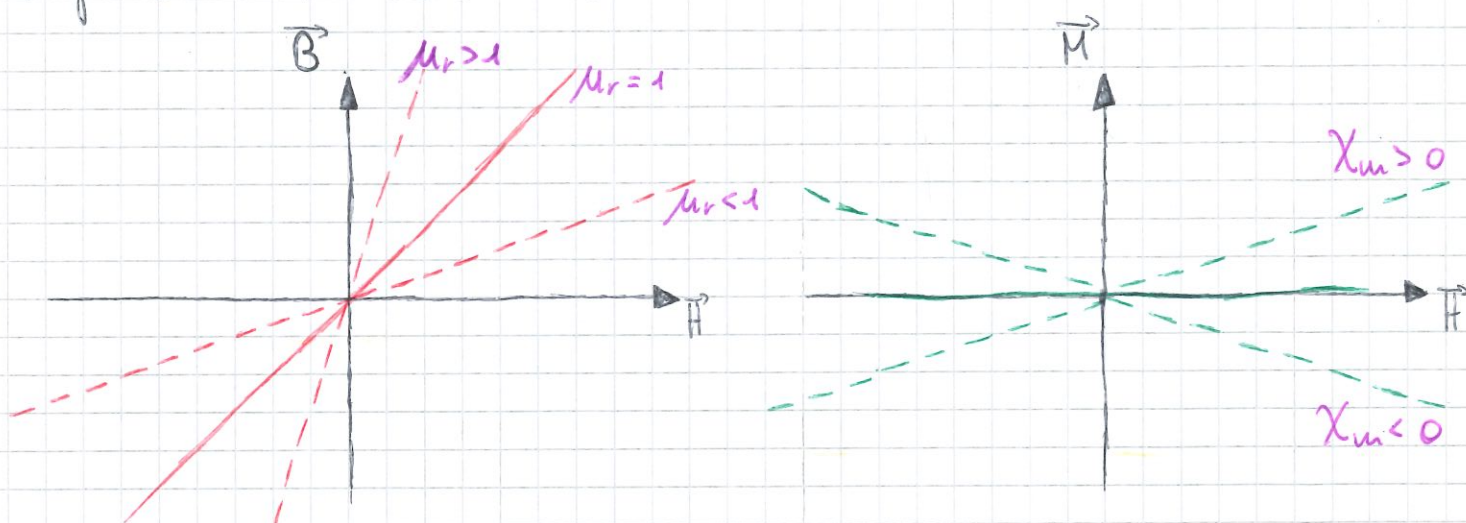
La cui circuitazione dipende solo delle correnti di conduzione e non quelle superficiali.

Se applichiamo le formule dell'argomento precedente avremo, considerando le seguenti:

$$\begin{cases} \vec{B} = \mu_r \vec{B}_0 \\ \vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \chi_m \vec{B}_0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\vec{H}} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{\mu_r \vec{B}_0}{\mu_0} - \frac{(\mu_r - 1)}{\mu_0} \vec{B}_0 = \underline{\frac{\vec{B}_0}{\mu_0}}$$

Perciò otteniamo che il campo magnetizzante è sempre proporzionale al campo magnetico in assenza di materiale magnetico.

I grafici relativi delle variazioni saranno:



Senza calcolarle scriveremo due formule ricavabili facilmente

$$"\vec{B} = \mu \vec{H}" ; "\vec{M} = \chi_m \vec{H}"$$

Nel caso FERROMAGNETICO, il grafico della magnetizzazione

