

ANALISI MATEMATICA I E GEOMETRIA

Proff. F. Dell'Oro, G. Grillo, E.M. Marchini - a.a. 2020–2021

PROGRAMMA, BIBLIOGRAFIA, MODALITÀ D'ESAME

PROGRAMMA

1. Insiemi numerici.

Numeri naturali, interi, razionali. Numeri reali, ordinamento e completezza. Estremo superiore e inferiore di un insieme di numeri reali. Principio di induzione. Fattoriale. Numeri complessi, piano di Gauss, forma algebrica e operazioni elementari. Forma trigonometrica e forma esponenziale dei numeri complessi. Radici n-esime di un numero complesso.

2. Calcolo differenziale.

Funzioni, dominio, codominio, rappresentazione cartesiana. Funzioni limitate, simmetriche. Funzioni elementari, funzioni monotone, traslazioni e dilatazione di grafici. Funzioni composte. Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche. Funzioni monotone, funzione inversa, funzioni inverse delle funzioni trigonometriche.

Successioni, carattere di una successione. Definizione di limite. Successioni monotone, limitate. Successioni geometriche. Il numero di Nepero e (con dim). Forme indeterminate di tipo esponenziale. Confronto tra infiniti e tra infinitesimi. Criterio del confronto (con dim), permanenza del segno. I simboli di Landau o piccolo e asintotico. Limiti e continuità. Asintoti. Limiti notevoli, utilizzo degli asintotici. Funzioni continue, classificazione delle discontinuità. Massimi e minimi relativi e assoluti. Teorema di Weierstrass, teorema degli zeri (con dim), teorema dei valori intermedi.

Definizione di derivata, interpretazioni fisiche e geometriche. Punti di non derivabilità. Derivate delle funzioni elementari. Regole di derivazione, derivazione della funzione inversa. Teorema di Fermat (con dim), teorema di Lagrange (con dim), applicazioni, test di monotonia. Teorema di de l'Hopital (con dim), derivata seconda, concavità e convessità. Studi di funzione. Formula di Taylor con resto di Peano (con dim). Formula di McLaurin, esempi. Formula di Taylor con resto di Lagrange, stima dell'errore. Polinomio di Taylor di funzioni composte.

3. Calcolo integrale.

Integrale alla Cauchy. Integrazione delle funzioni continue. Teorema della media integrale (con dim). Primo e secondo Teorema fondamentale del calcolo integrale (entrambi con dim). Integrazione per scomposizione, per sostituzione, per parti. Integrazione delle funzioni razionali fratte.

4. Algebra lineare e geometria analitica.

Matrici e la loro algebra. Vettori, somma e prodotto per uno scalare, norma, vettori linearmente indipendenti. Prodotto scalare e prodotto vettoriale. Prodotto misto tra vettori, calcolo di determinanti 2×2 e 3×3 .

Rette nel piano e nello spazio. Equazioni parametriche e cartesiane, parallelismo, perpendicolarità. Piani nello spazio, equazione cartesiana, parallelismo, ortogonalità. Rette e piani nello spazio. Distanza da un punto a una retta e a un piano.

Spazi vettoriali. Sottospazi vettoriali, proiezioni. Basi ortonormali. Applicazioni lineari. Determinante di una matrice quadrata di ordine qualunque. Rango di una matrice. Matrice inversa (con dim). Matrice di un'applicazione lineare (con dim). Sistemi lineari, teorema di Cramer (con dim). Sistemi lineari, teorema di Rouché-Capelli. Nucleo e immagine di un'applicazione lineare, teorema di nullità più rango (con dim). Applicazioni lineari iniettive, suriettive, biunivoche. Autovalori e autovettori, matrici diagonalizzabili. Condizione di diagonalizzabilità in termini degli autovettori (con dim). Autovalori regolari. Determinante e traccia in funzione degli autovalori. Matrici simmetriche, matrici ortogonali.

BIBLIOGRAFIA

- M. Bramanti, C. Pagani, S. Salsa, **Analisi Matematica 1 con elementi di geometria e algebra lineare**, Editore: Zanichelli (testo principale di riferimento);
- M. Contedini, G. Grillo, F. Punzo **Esercizi di analisi matematica I, geometria e algebra lineare**, Editore: La Dotta;
- M. Bramanti, **Esercizi di calcolo infinitesimale e algebra lineare**, Editore: Esculapio;
- G. Crasta, A. Malusa, **Elementi di Analisi Matematica e Geometria**, Editore: La Dotta.

MODALITÀ D'ESAME

ATTENZIONE: gli appelli della sessione invernale avranno luogo online. Si prega di consultare il file disponibile sul canale beep del corso per i dettagli tecnici.

Sono previsti appelli nel numero prescritto dalla scuola. Il primo di tali appelli è suddiviso in due prove intermedie, come sotto descritto.

È prevista una prova intermedia, in forma scritta, a metà semestre. Gli studenti che otterranno un voto maggiore o uguale a $18/32$ saranno ammessi a sostenere un'ulteriore prova scritta a fine semestre, prova che verterà sugli argomenti svolti nella seconda parte del corso. I restanti studenti dovranno sostenere l'esame nella sua totalità in uno dei successivi appelli ordinari, non potranno in particolare presentarsi alla seconda prova in itinere. Gli studenti che otterranno in entrambe le prove intermedie voti maggiori o uguali a $18/32$, avranno superato l'esame ed il voto sarà la media dei due voti ottenuti nelle prove in itinere.

Gli studenti risultati insufficienti alla seconda prova in itinere dovranno ripetere l'esame nella sua totalità in uno degli appelli ordinari successivi.

L'esame consta di una prova scritta obbligatoria che si articola in due parti (lo stesso giorno). Prima parte: riguarda gli argomenti di teoria, viene valutata al più 8 punti e si considera superata se lo studente ottiene almeno 4 punti: solo in tal caso lo studente avrà diritto alla correzione della seconda parte. Possono essere richiesti enunciati e dimostrazioni dei teoremi elencati nel programma, enunciati di tutti i restanti teoremi svolti, tutte le definizioni, discussioni generali sugli argomenti del programma.

Seconda parte: contiene alcuni esercizi; per ogni esercizio viene precisato il punteggio massimo che si può ottenere. La seconda parte viene valutata al più 24 punti.

Sommando i voti delle due parti si ottiene il voto finale, se > 30 , il voto corrisponde alla lode.

La prova scritta si intende superata quando il voto complessivo è pari almeno a $18/32$. Per raggiungere tale voto lo studente può superare i compiti in itinere oppure uno qualunque degli appelli successivi. La prova scritta dei due compiti e di qualunque altro appello è sempre del formato descritto qui sopra. Verranno specificamente valutate la conoscenza e la capacità di comprensione degli argomenti svolti nel programma e la capacità di applicazione degli stessi.

La durata delle prove in itinere è di norma di 2 ore, mentre la durata delle prove ordinarie è di norma di 2 ore e 30 minuti. Possono aver luogo piccole variazioni a seconda del dettaglio dei compiti.

Avvertenze:

- Durante lo svolgimento di ogni prova d'esame lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari, smartwatch o qualsiasi altra apparecchiatura elettronica. Lo studente che contravverrà a tale regola, o che sarà sorpreso a chiedere o fornire aiuti ad altro studente, sarà immediatamente allontanato dall'aula d'esame e l'esame stesso si intenderà non superato. In tal caso il docente assegnerà l'esito "riprovato" agli studenti coinvolti.
- Lo studente deve presentarsi alle prove d'esame munito di un documento di riconoscimento, in caso contrario non verrà ammesso in aula.
- L'iscrizione alle prove è tassativa. Lo studente non iscritto (o iscritto tardivamente) non verrà ammesso in aula.

Le regole sono tassative e non ammettono eccezioni. Si prega quindi di non richiederle.

- Insieme numerabile: Un insieme A è numerabile se \exists una funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ che sia biunivoca
- Proprietà delle operazioni elementari:
 - $(x+y)+z = x+(y+z)$
 - $x+y = y+x$
 - $x+0 = x$
 - $\forall x \in \mathbb{R} \exists$ un numero indicato con $(-x)$ / $x+(-x)=0$
 - $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
 - $x \cdot y = y \cdot x$
 - $x \cdot 1 = x$
 - $\forall x \in \mathbb{R} \exists$ un numero indicato con (x^{-1}) / $x \cdot x^{-1} = 1$
 - $x(y+z) = xy + xz$
- Campo: insieme dotato di due operazioni che soddisfa le precedenti proprietà
- Proprietà dell'ordinamento su \mathbb{R} :
 - $x \leq x$
 - Se $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$
 - Se $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$
 - Se $x \leq y$ e $z \leq w \Rightarrow x+z \leq y+w$
 - Se $x \leq y$ e $z \geq 0 \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$
- Campo ordinato: Un insieme dotato di 2 operazioni e di un ordinamento ordinato che soddisfa tutte le 14 proprietà
- Massimo di un insieme: Sia A un insieme, $A \subseteq \mathbb{R}$. Dico che x è un massimo di A se $x \in A$ e se $x \geq a, \forall a \in A$.
- Minimo di un insieme: Sia A un insieme, $A \subseteq \mathbb{R}$. Dico che y è un minimo di A se $y \in A$ e se $y \leq a, \forall a \in A$.
- Insieme limitato dall'alto/dal basso: Sia A un insieme, $A \subseteq \mathbb{R}$. Dico che A è limitato dall'alto (risp. dal basso) se $\exists x \in \mathbb{R} / x \geq a, \forall a \in A$ (risp. $x \leq a, \forall a \in A$). Dico che un insieme è limitato se lo è sia dall'alto sia dal basso.
- Maggiorante: Sia A un insieme, $A \subseteq \mathbb{R}$. Dico che $x \in \mathbb{R}$ è un maggiorante di A se $x \geq a, \forall a \in A$. A ammette maggiorante se A è limitato dall'alto.
- Minorante: Sia un insieme, $A \subseteq \mathbb{R}$. Dico che $y \in \mathbb{R}$ è un minorante di A se $y \leq a, \forall a \in A$. A ammette minorante se A è limitato dal basso.
- SupA: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Se A è limitato dall'alto, cioè ammette maggioranti, allora l'insieme dei maggioranti ammette un minimo, chiamato $\sup A$.
- InfA: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Se A è limitato dal basso, cioè ammette minoranti, allora l'insieme dei minoranti ammette un massimo, chiamato $\inf A$.
- Numero complesso: $z = x + iy$
- Esponenziale complesso: $e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot [\cos y + i \sin y]$
- Numero complesso coniugato: $\bar{z} = x - iy$
- Modulo di un numero complesso: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$
- Proprietà del modulo e del coniugato:
 - $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$
 - $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
 - $\bar{\bar{z}} = z \Rightarrow z \in \mathbb{R}$
 - $\bar{z} \cdot z = |z|^2$
 - $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
 - $|\bar{z}| = |z|$
 - $|z+w| \leq |z| + |w|$

$$\circ \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}$$

- Formula di De Moivre per il prodotto: $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 [\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)]$
- Formula di De Moivre per il rapporto: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + i \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)]$
- Formula di De Moivre per la potenza: $z^n = \rho^n [\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)]$
- Formula di De Moivre per le radici: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \right]$
- Come trovare ϑ :

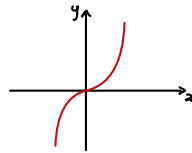
$$\circ \cos \vartheta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \vartheta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\circ \vartheta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & x < 0 \end{cases}$$

- Teorema fondamentale dell'algebra:** Un polinomio di grado n ha sempre n soluzioni in \mathbb{C} .

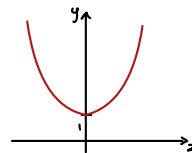
- Seno iperbolico: $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Funzione $\begin{cases} \text{Dispari} \\ \text{Non periodica} \\ \text{Biettiva} \rightarrow \text{invertibile} \end{cases}$



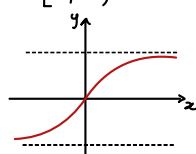
- Coseno iperbolico: $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Funzione $\begin{cases} \text{Pari} \\ \text{Non periodica} \\ \text{Biettiva se si restringe D a } [0; +\infty) \rightarrow \text{invertibile} \end{cases}$



- Tangente iperbolica: $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Funzione $\begin{cases} \text{Dispari} \\ \text{Non periodica} \end{cases}$



- Successione reale: corrispondenza tra \mathbb{N} e \mathbb{R} .

- Successione limitata: Una successione $\{a_n\}$ è limitata dall'alto (risp. dal basso) se l'insieme $A := \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ ammette maggioranti (risp. minoranti).

- Definitivamente per una successione: Una proprietà vale DEFINITIVAMENTE per una successione $\{a_n\}$ se vale $\forall n > N$ opportuno.

- Successione monotona: Una successione $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ è monotona crescente (risp. decrescente) se $a_n \leq a_{n+1}$ (risp. $a_n \geq a_{n+1}$).

- Proprietà:

- \circ Se $\{a_n\}$ è una successione monotona crescente o decrescente, allora ammette limite.

- \circ Se tale limite è finito, allora $\{a_n\}$ è limitata.

- Algebra dei limiti:** Sia $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni convergenti e $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ i loro rispettivi limiti.

- $\circ \lambda a_n + \beta b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda l_1 + \beta l_2, \quad \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$

- $\circ a_n \cdot b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l_1 \cdot l_2$

- $\circ \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{l_1}{l_2}, \quad l_2 \neq 0$

- Permanenza del segno:**

- \circ Se $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l > 0$ (risp. < 0), allora $a_n > 0$ (risp. $a_n < 0$) definitivamente.

- \circ Sia $a_n \geq 0$ (risp. $a_n \leq 0$) definitivamente e a_n ammette limite $l \in \mathbb{R}$, allora $l \geq 0$ (risp. $l \leq 0$).

- Teorema del confronto:**

- \circ Ipotesi: Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ e $\{c_n\}$ successioni /

- $\square a_n \leq b_n \leq c_n$

- $\square a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l, \quad c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$

- \circ Tesi: $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$

- o Dimostrazione:

Sappiamo che $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 / l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon, l - \varepsilon \leq c_n \leq l + \varepsilon \quad \forall n \geq N$.

Ma allora, sempre $\forall \varepsilon > 0, l - \varepsilon \leq a_n \leq b_n \leq c_n \leq l + \varepsilon$ definitivamente.

In particolare vale $l - \varepsilon \leq b_n \leq l + \varepsilon$ definitivamente, cioè $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$.

- Forme di indecisione: $\left[\frac{\infty}{\infty}\right], \left[\frac{0}{0}\right], [+ \infty - \infty], [0 \cdot \infty], [1^\infty], [0^0], [\infty^0]$

- Numero di nepero:

- o Tesi: La successione $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ammette limite finito, compreso tra 2 e 3 (indicato con e).

- o Dimostrazione:

Per la dimostrazione ci si serve di una disuguaglianza ausiliaria (di Bernoulli):

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq -1$ vale $(1+x)^n \geq 1+nx$. Prima si dimostra che $\{a_n\}$ è crescente: ($n \geq 2$)

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left[\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right]^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1}$$

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \geq \left[1 + n\left(-\frac{1}{n^2}\right)\right] \cdot \frac{n}{n-1} \quad \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1}$$

Ma $\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} = 1 \quad \forall n \geq 2$ Ovvvero $a_n \geq a_{n-1} \quad \forall n \geq 2$, quindi $\{a_n\}$ è crescente.

Dunque, secondo un teorema riguardante le successioni, $\{a_n\}$, essendo crescente, ammette limite, o finito, o $+\infty$. Se la successione $\{a_n\}$ è limitata, allora il limite risulterà finito.

Sia $b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Allora vale $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ e, dunque, $b_n \geq a_n \quad \forall n$.

Si può mostrare, con calcoli simili ai precedenti che $\{b_n\}$ è decrescente.

Ma allora $a_n \leq b_n \leq 4 \quad \forall n$.

Dunque $a_n \leq b_n \leq 4 \quad \forall n$ e, per questo, si può affermare che $\{a_n\}$ è limitata.

- Equivalenza asintotica di successioni: Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni. Dico che $\{a_n\}$ è asintotica a $\{b_n\}$ se vale $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. In tal caso scrivo $a_n \sim b_n$.

- Proprietà dell'asintotico (\sim):

- o Se $a_n \sim b_n$ allora o $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ convergono allo stesso limite finito, o divergono entrambe a $+\infty$ o $-\infty$, o entrambe non hanno limite.

- o Se $a_n \sim b_n$ e $b_n \sim c_n \Rightarrow a_n \sim c_n$.

- o Se $a_n \sim b_n, c_n \sim d_n \Rightarrow a_n c_n \sim b_n d_n$ e, se $c_n, d_n \neq 0, \frac{a_n}{c_n} \sim \frac{b_n}{d_n}$.

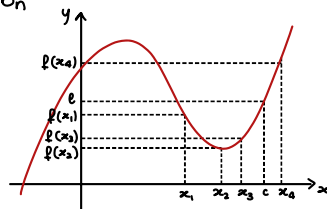
- L'asintotico NON passa a somme e differenze: se $a_n \sim b_n, c_n \sim d_n$, in generale $a_n \pm c_n \not\sim b_n \pm d_n$.

- Simbolo di piccolo: Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni. Dico che $a_n = o(b_n)$ se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

- Definizione successionale di limite:

Dico $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$, con $c, l \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$ se \forall successione $\{x_n\}$ di punti / f sia definita

in $x_n, x_n \neq c$ definitivamente e $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c$, vale $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$.



- Intorno di un punto: Sia $c \in \mathbb{R}$. Dico che I è un intorno di c se $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo del tipo $(a; b) / c \in (a; b)$.

- Intorno di $\pm \infty$: Dico che I è un intorno di $+\infty$ (risp. $-\infty$) se I è della forma $(a; +\infty)$ (risp. $(-\infty; b)$).

- Definitivamente per una funzione:

Una funzione ha una proprietà DEFINITIVAMENTE per $x \rightarrow c \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$ se tale proprietà vale in un opportuno intorno di c , privato di c .

- Proprietà dei limiti:

- o Il limite, se \exists , è unico.

- o Teorema del confronto: Se, per $x \rightarrow c \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$ vale $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} l, g(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} l, l \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$ e vale $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ definitivamente per $x \rightarrow c$, per una funzione h opportuna, $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} l$.

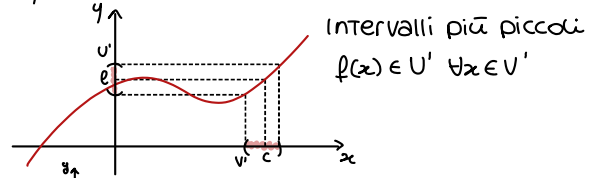
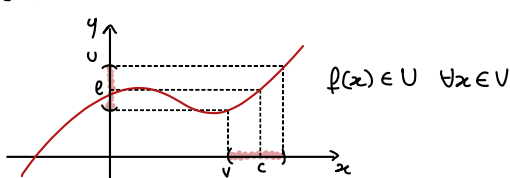
○ Teorema della permanenza del segno:

- Se $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l > 0$, allora $f(x) > 0$ definitivamente per $x \rightarrow c$.
- Se $f(x) > 0$ definitivamente per $x \rightarrow c$ e $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} l$, allora $l \geq 0$.

○ Algebra dei limiti: Si assuma che $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} l_1$, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} l_2$, $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$.

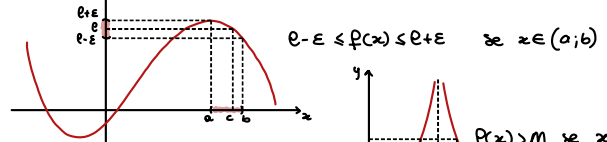
- $\alpha f(x) + \beta g(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} \alpha l_1 + \beta l_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $f(x) \cdot g(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} l_1 \cdot l_2$
- $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow c} \frac{l_1}{l_2}$, $l_2 \neq 0$

- Definizione topologica di limite: Siano $c, l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e sia f definita almeno definitivamente per $x \rightarrow c$. Dico che $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$ se \forall intorno U di l \exists un intorno V di c $\forall x \in V, x \neq c$, vale $f(x) \in U$.



- Definizione topologica = definizione successionale:

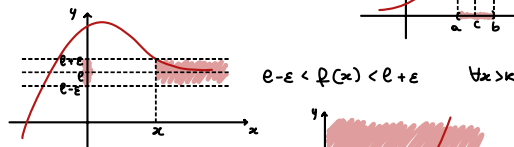
- $c, l \in \mathbb{R}$. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / \forall x \neq c, |x - c| < \delta$, vale $|f(x) - l| < \varepsilon$.



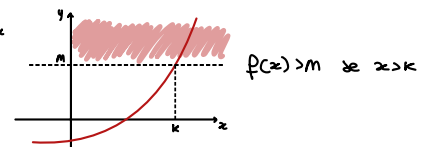
- $c \in \mathbb{R}, l = +\infty$ (analogamente $-\infty$). $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \exists \delta > 0 / \forall x \neq c, |x - c| < \delta$, vale $f(x) > M$.



- $l \in \mathbb{R}, c = +\infty$ (analogamente $-\infty$). $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \exists K > 0 / \forall x > K$, vale $|f(x) - l| < \varepsilon$.



- $c, l = +\infty$ (analogamente se uno o entrambi i valori sono $-\infty$). $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \exists K > 0 / \forall x > K$, vale $f(x) > M$.



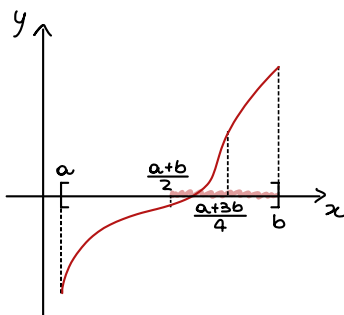
- Funzione continua in un punto: Sia $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$. Dico che f è continua in $x_0 \in (a; b)$ se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Funzione continua in un intervallo: Sia $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$. Dico che f è continua in $(a; b)$ se essa è continua $\forall x \in (a; b)$.
- Limite della funzione composta: Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni. Supponiamo che $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} t_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e $g(x) \neq t_0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$. Allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l$.
- Teorema degli zeri:

○ Ipotesi:

- Sia $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a; b]$.
- $f(a) \cdot f(b) < 0$

○ Tesi: $\exists c \in (a; b) / f(c) = 0$.

○ Dimostrazione:



Sia $c = \frac{a+b}{2}$ il punto medio di $[a; b]$.

Allora in esattamente uno degli intervalli $[a; \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}; b]$ valgono per f le ipotesi del teorema, a meno che $f(\frac{a+b}{2}) = 0$.

Indichiamo con $[a_1; b_1]$ tale intervallo.

Come prima, uno degli intervalli $[a_1; \frac{a_1+b_1}{2}]$, $[\frac{a_1+b_1}{2}; b_1]$ valgono per f le ipotesi del teorema, a meno che $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0$.

Iterando il procedimento ottengo una successione di intervalli $[a_n; b_n]$

1.) $[a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n]$, quindi $\{a_n\}$ cresce e $\{b_n\}$ decresce $\forall n$.

2.) $a_n - b_n = \frac{a-b}{2^n} \forall n$.

3.) $f(a_n) f(b_n) < 0$.

Per il primo punto $\{a_n\}$ è convergente, in quanto crescente e limitata. Analogamente $\{b_n\}$ è convergente, in quanto decrescente e limitata.

Dunque $\exists l_1, l_2 \in \mathbb{R} / a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l_1, b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l_2$.

Quindi $a_n - b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l_1 - l_2$ per l'algebra dei limiti, ma per il secondo punto $a_n - b_n = \frac{a+b}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Allora per l'unicità del limite $l_1 - l_2 = 0$, cioè $l_1 = l_2$.

Pongo $c := l_1 (= l_2)$ e affermo che $f(c) = 0$.

Infatti, per la continuità di f avremo $f(a_n)f(b_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(c)^2$, ma $f(a_n)f(b_n) < 0 \forall n$ per il terzo punto.

Per il teorema della permanenza del segno si ha quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n)f(b_n) \leq 0$ (abbiamo già dimostrato che il limite esiste).

Dunque $f(c)^2 \leq 0 \Rightarrow f(c) = 0$.

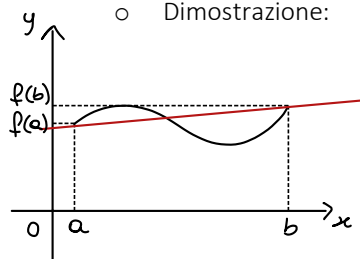
- **Teorema di Weierstrass:** Sia $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a; b]$. Allora f ammette massimo e minimo assoluti in $[a; b]$, cioè $\exists x_1, x_2 \in [a; b] / f(x_1) \leq f(x) \forall x \in [a; b], f(x_2) \geq f(x) \forall x \in [a; b]$.
- **Teorema dei valori intermedi:** Sia $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a; b]$. Siano, $m, M \in \mathbb{R}$ il minimo e il massimo assoluti in $[a; b]$ rispettivamente. Sia $\lambda \in (m; M), m < M$. Allora $\exists c \in [a; b] / f(c) = \lambda$.
Sia $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a; b)$. Dico che f è derivabile in x_0 se \exists finito $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$. Se ciò accade, tale limite si indica con $f'(x_0)$.
- **Derivata:** Sia $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ e derivabile in $x_0 \in (a; b)$. Allora la retta $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ viene detta retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0; f(x_0))$.
- **Algebra delle derivate:** Siano $f, g: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ e derivabili in $x_0 \in (a; b)$. Allora sono derivabili in x_0
 - $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 f \pm \lambda_2 g$ e vale $(\lambda_1 f \pm \lambda_2 g)'(x_0) = \lambda_1 f'(x_0) \pm \lambda_2 g'(x_0)$
 - $f g$ e vale $(f g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$
 - $\frac{f}{g}, g(x_0) \neq 0$, e vale $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g(x_0)^2}$
- **Regola della catena** (derivate di funzioni composte): $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$.
- **Derivata della funzione inversa:** $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$
- **Punto angoloso:** \exists finiti $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =: f'_+(x_0), \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =: f'_-(x_0)$, ma $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$.
- **Cuspide:** $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = +\infty$ e $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = -\infty$ o viceversa.
- **Flesso a tangente verticale:** $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = +\infty$ o $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = -\infty$.
- **Punti di massimo/minimo assoluti:**
Sia $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a; b)$. Dico che x_0 è punto di massimo (risp. minimo) assoluto se $f(x_0) \geq f(x)$ (risp. $f(x_0) \leq f(x)$) $\forall x \in (a; b)$.
- **Punti di massimo/minimo relativi:** Sia $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a; b)$. Dico che x_0 è punto di massimo (risp. minimo) relativo se $\exists \delta > 0 / f(x_0) \geq f(x)$ (risp. $f(x_0) \leq f(x)$) $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.
- **Teorema di Fermat:**
 - Ipotesi:
 - Sia $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ e derivabile in $x_0 \in (a; b)$.
 - x_0 punto di estremo (minimo o massimo) relativo per f .
 - Tesi: $f'(x_0) = 0$.
 - Dimostrazione:
Supponiamo che x_0 sia un punto di massimo relativo (la dimostrazione nel caso x_0 sia un punto di minimo relativo è identica).
Allora, se x è sufficientemente vicino a x_0 , vale $f(x) - f(x_0) < 0$.
Se $x < x_0$, allora $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$.
Dunque, essendo per ipotesi f derivabile in x_0 , vale $f'(x_0) \geq 0$ per il teorema di permanenza del segno.
Analogamente, se $x > x_0$, vale $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$ e, quindi $f'_+(x_0) \leq 0$.
Per la derivabilità di f in x_0 deve però valere $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.
Allora $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$.

- Teorema di Lagrange:

- Ipotesi: Sia $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a; b]$ e derivabile in $(a; b)$.

- Tesi: $\exists c \in (a; b) / \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

- Dimostrazione:



Si consideri la retta che passa per $A(a; f(a))$ e $B(b; f(b))$, che ha equazione

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

Sia w la funzione così definita

$$w = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right].$$

Vale dunque $w(b) = w(a) = 0$.

Inoltre w è continua in $[a; b]$ e derivabile in $(a; b)$. Applicando il teorema di Weierstrass si trova che $\exists x_1, x_2 \in [a; b] / x_1$ sia il punto di massimo assoluto per w e x_2 punto di minimo assoluto per w . Si ponga $w(x_1) = M$ e $w(x_2) = m$. Se $M = m$, allora w è costante e quindi $w'(x) = 0 \forall x \in (a; b)$. Se $M \neq m$, almeno uno tra x_1 e x_2 appartiene a $(a; b)$, e in a e b , $w = 0$. Per il teorema di Fermat, in tale punto (indicato con c), vale $w'(c) = 0$.

Allo stesso tempo vale $w'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \forall x \in (a; b)$

Ma allora $w'(c) = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

- Applicazioni del teorema di Lagrange:

- Sia $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$. Allora $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a; b) \iff f$ è costante in $(a; b)$.

- Criterio di monotonia:** Sia $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $(a; b)$. Allora f è crescente (risp. decrescente) in $(a; b) \iff f'(x) \geq 0$ (risp. $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a; b)$).

- Sia $f: [a; b]$, derivabile in $(a; b)$ e continua in $[a; b]$. Si supponga che \exists finito $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ e si indichi con k tale limite. Allora $f'(a) \exists$ e vale k .

- Regola di De L'Hospital:

- Ipotesi:

- Siano $f, g: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili in $(a; b)$.

- Si assume che g, g' non si annullino in un opportuno intorno $(a; a + \delta)$ di a ($\delta > 0$).

- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ (oppure $\pm \infty$).

- $\exists l \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\} / \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$.

- Tesi: Allora vale $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

- Dimostrazione $\left[\frac{0}{0} \right]$:

Si ponga $f(a) = g(a) := 0$. Sia $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a^+$, $x_n \neq a$ definitivamente.

Infine si ponga $h(x) := f(x)g(x) - f(x_n)g(x_n)$ e si ha $h(a) = 0$ e $h(x_n) = 0$.

Applicando il teorema di Lagrange alla funzione h nell'intervallo $[a; x_n]$ si ottiene che $\exists t_n \in (a; x_n) / h'(t_n) = \frac{h(x_n) - h(a)}{x_n - a}$. Si calcoli h' : $h' = f(x)g'(x) - f'(x)g(x_n)$.

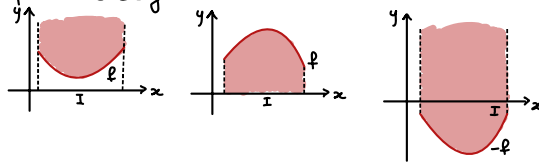
Quindi $h'(t_n) = f(x_n)g'(t_n) - f'(t_n)g(x_n) \iff \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(t_n)}{g'(t_n)}$ e, dato che

$x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a^+$, ne segue che $t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a^+$.

Ma allora vale $\frac{f'(t_n)}{g'(t_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ ed essendo $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(t_n)}{g'(t_n)} \implies \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$

\forall successione $\{x_n\} / x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a^+$ definitivamente.

Per la definizione successionale di limite si ha $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a^+} l$.

- Sia $A \subset \mathbb{R}^2$. Dico che A è convesso se, \forall coppia di punti $p_1, p_2 \in A$, il segmento che li congiunge è contenuto in A .
 - Insieme convesso: Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo. Definisco l'epigrafo di f come segue:
 $\text{epi}(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in I, y \geq f(x)\}$.
 Dico che f è convessa su I se $\text{epi}(f)$ è un insieme convesso.
 Dico che f è concava su I se $\text{epi}(-f)$ è un insieme convesso.
- 
- Punti di flesso: Sia $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a; b)$ / f sia derivabile in x_0 , oppure / " $f'(x_0) = \pm \infty$ ", cioè $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$. Dico che x_0 è un punto di flesso per f se $\exists h > 0$ / f è strettamente convessa in $(x_0; x_0+h)$ e strettamente concava per $(x_0-h; x_0)$, o viceversa.
 - Formula di Taylor: Sia $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in (a; b)$. Allora $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$ e, quindi,
 $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \varepsilon(h)$, con $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Dunque $f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$ e, essendo $h = x - x_0$ e $x = h + x_0$, scrivo $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0)$ con $\varepsilon(x - x_0) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$
 $\Rightarrow (x - x_0)\varepsilon(x - x_0) = o(x - x_0)$ per $x \rightarrow x_0$. Ma allora $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$
 per $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow f$ derivabile in x_0 . La retta tangente è la miglior retta che approssima il grafico di f in un intorno di $(x_0; f(x_0))$. È possibile individuare un polinomio di grado n con analoghe proprietà

o Ipotesi:

- Sia $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile n -volte in $x_0 \in (a; b)$.
- Si indichi con $f^{(k)}(x_0)$ la derivata k -esima di f in x_0 , $f^{(0)}(x_0) := f(x_0)$.
- Sia $P_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$.

o Tesi: Allora vale $f(x) = P_n(x) + o[(x - x_0)^n]$.

o Dimostrazione:

Sia $n=1$. So che f è derivabile in $x_0 \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \rightarrow x_0$. Suppongo che la tesi sia vera per un certo intero n e la dimostro vera per l'intero successivo $n+1$, cioè che $f(x) = P_{n+1}(x) + o[(x - x_0)^{n+1}]$ per $x \rightarrow x_0$, ovvero $\frac{f(x) - P_{n+1}(x)}{(x - x_0)^{n+1}} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$, sapendo che vale per n : $\frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$.

Indico il polinomio di Taylor di una funzione f con $P_{n,f}$ e affermo che $P'_{n,f}(x) = P_{n-1,f'}(x) \quad \forall x$. In generale si verifica l'affermazione derivando $P_n(x)$.

Verifico ora che $\frac{f(x) - P_{n+1,f}(x)}{(x - x_0)^{n+1}} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$. Applico la regola di De l'Hospital al limite considerato e ottengo di dover verificare se \exists il limite per $x \rightarrow x_0$.

$\frac{f'(x) - P'_{n+1,f}(x)}{(n+1)(x - x_0)^n} = \frac{f'(x) - P_{n,f'}(x)}{(n+1)(x - x_0)^n}$. Per l'ipotesi di induzione, la tesi è vera per n e per ogni funzione che soddisfa le ipotesi del teorema, in particolare per f' .

Si ha dunque $\frac{f'(x) - P_{n,f'}(x)}{(x - x_0)^n} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$.

Ma allora $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_{n+1,f}(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - P_{n,f'}(x)}{(n+1)(x - x_0)^n} = 0$

- Formula di Taylor con il resto di Lagrange:

Sia $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile $n+1$ volte in $(a; b)$. Sia $x_0 \in (a; b)$. Sia infine $P_n^{(x)}$ il polinomio di ordine n , centrato in x_0 . Esiste allora, fissato $x \in (a; b)$, $x \neq x_0$, un punto c compreso tra x e x_0 e / $f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$.