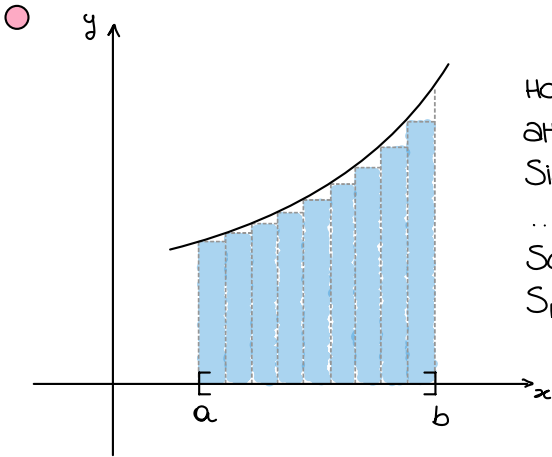


• Integrale di Cauchy-Riemann

Sia $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata.

Dico che f è integrabile (secondo Cauchy-Riemann) in $[a; b]$ se, detta S_n una sua somma di Cauchy-Riemann, si ha che, comunque siano scelti i punti c_k nella definizione di S_n , si abbia $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = l \in \mathbb{R}$ e l non dipende dalla scelta dei c_k .

In tal caso si pone $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n =: \int_a^b f(x) dx$.



Ho diviso $[a; b]$ in n parti uguali e ho scelto come altezza dei rettangoli un valore di $f(x)$ (il minimo).
Siano allora $x_0 = a$, $x_1 = a + \frac{b-a}{n}$, $x_2 = a + 2 \frac{b-a}{n}$,
..., $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$, ..., $x_n = b$.
Scelgo, $\forall k$, un punto $c_k \in [x_{k-1}; x_k]$ e definisco
 $S_n := \sum_{k=1}^n f(c_k)(x_k - x_{k-1})$ Area del rettangolo
Altezza $\frac{b-a}{n}$, $\forall k$ lunghezza del singolo intervallo

• Integrazione di funzioni continue

f	F è una primitiva di f
$f(x) = k \quad k \in \mathbb{R}$	$F(x) = kx + c$
$f(x) = x^a \quad a \neq -1$	$F(x) = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$
$f(x) = \frac{1}{x} \quad x \neq 0$	$F(x) = \ln x + c$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$
$f(x) = \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2$	$F(x) = \tan x + c$
$f(x) = \frac{1}{(\sin x)^2}$	$F(x) = -\cot x + c$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$
$f(x) = a^x \quad a > 0, a \neq 1$	$F(x) = \frac{a^x}{\log a} + c$
$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$F(x) = \arctan x + c$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x) = \arcsin x + c$
$f(x) = \sinh x$	$F(x) = \cosh x + c$
$f(x) = \cosh x$	$F(x) = \sinh x + c$
$f(x) = \frac{1}{(\cosh x)^2}$	$F(x) = \tanh x + c$
$f(x) = \frac{1}{(\sinh x)^2}$	$F(x) = -\coth x + c$

- Teorema della media integrale

- Ipotesi: Sia $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.
- Tesi: Allora $\exists c \in [a; b] / \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$.
- Dimostrazione
Per il teorema di Weierstrass f ammette massimo M e minimo m assoluti su $[a; b]$.
Vale allora, essendo $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a; b]$,
$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b m dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b M dx = M, \text{ cioè}$$
$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Dunque $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ è compreso tra il minimo e il massimo in $[a; b]$.
Il teorema dei valori intermedi, valido essendo f continua in $[a; b]$, vale allora che $\exists c \in [a; b] / f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

- Primo Teorema fondamentale del calcolo integrale

- Ipotesi
 - Sia $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile in $[a; b]$.
 - Si assuma che f ammetta una primitiva F .
- Tesi: Allora vale $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.
- Dimostrazione
Siano, come nella definizione di somma di Riemann, $x_0 = a, \dots, x_k = a + k \frac{(b-a)}{n}, \dots, x_n = b$.
Si ha $F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = [F(x_n) - F(x_{n-1})] + [F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})] + \dots + [F(x_k) - F(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^n [F(x_k) - F(x_{k-1})]$.
Applicando il teorema di Lagrange a F negli intervalli $[x_{k-1}; x_k]$ (F è derivabile su $[a; b]$ per ipotesi) si ottiene $F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n [F(x_k) - F(x_{k-1})] \stackrel{\text{LAGRANGE}}{=} \sum_{k=1}^n F'(c_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(c_k)(x_k - x_{k-1})$ per opportuni $c_k \in (x_{k-1}; x_k)$.
Dunque $F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n f(c_k)(x_k - x_{k-1}) = S_n \quad \forall n$ e sappiamo che $n \rightarrow +\infty$, essendo f integrabile, $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ qualunque siano i valori dei c_k .
Ne segue quindi che $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$.

- Secondo Teorema fondamentale del calcolo integrale

- Ipotesi
 - Sia $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile in $[a; b]$.
 - Sia $F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt$, $x_0 \in [a; b]$ fissato.
- Tesi
 - Allora F è continua su $[a; b]$.
 - Allora se f è continua su $[a; b]$, F è derivabile su $[a; b]$ e vale $F'(x) = f(x)$, cioè F è una primitiva di f .

- o Dimostrazione

Essendo f integrabile, allora f è limitata, dunque $\exists M > 0 \mid |f(t)| \leq M \quad \forall t \in [a; b]$.

Allora, dato $x \in [a; b]$, vale $F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_x^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt$

$$\left| \int_x^{x+h} f(t) dt \right| \leq \int_x^{x+h} |f(t)| dt$$

$$\left| \int_x^{x+h} f(t) dt \right| \leq \int_x^{x+h} M dt = M(x+h-x) = Mh \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \text{ dove abbiamo assunto}$$

per semplicità $h > 0$ (considerazioni analoghe per $h < 0$), cioè

$F(x+h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} F(x)$, ossia F è continua in x .

Riguardo a \bullet sappiamo che $F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt = f(c)(x+h-x) = f(c) \cdot h$
per un opportuno c compreso tra x e $x+h$. TEOREMA DELLA MEDIA

Essendo f continua in x , $f(c) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x)$ (c dipende da h).

Dunque $c \xrightarrow{h \rightarrow 0} x$.

Ma allora $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x)$.

Quindi F è derivabile in x e vale $F'(x) = f(x)$.

- Integrazione per scomposizione: $\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$

- Integrazione per sostituzione

Sia F una primitiva di f , cioè $F'(t) = f(t) \quad \forall t \in I$ intervallo.

Sia ora $\varphi: [a; b] \rightarrow I$ continua e φ' continua.

Allora $\frac{d}{dx} F(\varphi(x)) = F'(\varphi(x)) \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \varphi'(x)$.

Cioè se F è una primitiva di $f \Rightarrow F(\varphi(x))$ è una primitiva di $f(\varphi(x)) \varphi'(x) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(t) dt$, con $t = \varphi(x)$.

La formula si ricorda ponendo $t = \varphi(x)$ così che $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x)$ e " $dt = \varphi'(x) dx$ ".

- Integrazione per parti: $\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$

- Integrazione delle funzioni razionali fratte: $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = \int f(x) dx$

- o Grado $P \geq$ Grado Q

Esegui la divisione di polinomi.

Grazie a ciò è possibile scrivere $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = r(x) + \frac{s(x)}{Q(x)}$, con r, s polinomi e Grado $s <$ Grado Q .

$$\int f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow f(x) = x - \frac{x}{x^2+1}$$

- o Grado $Q = 1$: $\int \frac{A}{ax+b} dx = \frac{A}{a} \ln|ax+b| + c$

- o Grado $Q = 2$

- Q ha 2 radici reali

$$\int \frac{x}{x^2-3x+2} dx = \int \frac{x}{(x-1)(x-2)} dx = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}, \text{ con } A, B \in \mathbb{R} \text{ distinte.}$$

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x(A+B) + 2A-B}{(x-1)(x-2)}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A-B=0 \end{cases} \Rightarrow A=-1, B=2$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2}$$

$$\int \frac{x}{x^2-3x+2} dx = \int \frac{-1}{x-1} dx + \int \frac{2}{x-2} dx = -\ln|x-1| + 2\ln|x-2| + c = \ln \frac{(x-2)^2}{|x-1|} + c$$

- Q ha radici reali coincidenti

$$f = \frac{p(x)}{(x-x_0)^2}$$

Si scrive allora $f(x) = \frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2}$ e si ricavano $A, B \in \mathbb{R}$.

- Q ha radici complesse coniugate: $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + c$

- Grado $Q \geq 3$: Teoricamente è sempre possibile scomporre il denominatore in un prodotto di fattori di primo grado, o di secondo grado irriducibili.

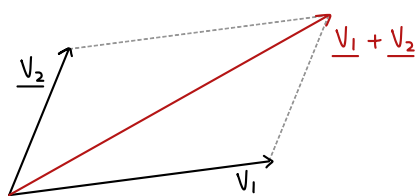
Vettori

- Norma/modulo: $|\underline{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$
- Direzione: individuata da una retta
- Verso

Versori: vettori di modulo unitario

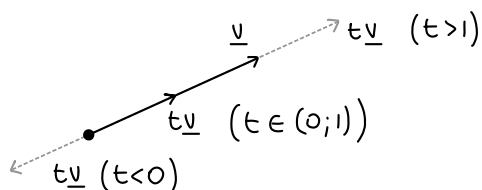
- $|\underline{i}| = |\underline{j}| = |\underline{k}| = 1$
- $\underline{i} \cdot \underline{j} = \underline{i} \cdot \underline{k} = \underline{j} \cdot \underline{k} = 0$
- $\underline{i} \times \underline{i} = \underline{j} \times \underline{j} = \underline{k} \times \underline{k} = 0$
- $\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}, \underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}, \underline{j} \times \underline{k} = \underline{i}$ (e quindi $\underline{j} \times \underline{i} = -\underline{k}, \underline{i} \times \underline{k} = -\underline{j}, \underline{k} \times \underline{j} = -\underline{i}$)

Somma di vettori



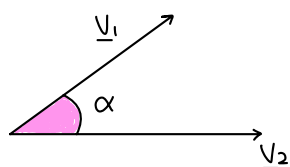
Regola del parallelogramma

Prodotto tra uno scalare e un vettore



$tv, t \in \mathbb{R}$

Prodotto scalare



Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \mathbb{R}^3$.

Si definisce $\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 := |\underline{v}_1| |\underline{v}_2| \cos \alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$

La definizione viene dalla fisica, ad esempio si pensi al lavoro di una forza.

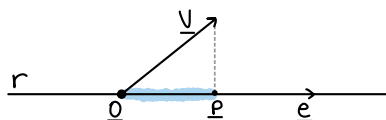
Se $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ rispetto a una base ortonormale, ho posto $|\underline{v}| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

- Proprietà

- $\underline{v} \cdot \underline{w} = \underline{w} \cdot \underline{v}$
- $\underline{v} \cdot (\underline{w} + \underline{u}) = \underline{v} \cdot \underline{w} + \underline{v} \cdot \underline{u}$
- $(t\underline{v}) \cdot \underline{w} = t(\underline{v} \cdot \underline{w})$
- $\underline{v} \cdot \underline{v} = |\underline{v}|^2$

- $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$ se $\underline{v} \perp \underline{w}$

- Lunghezza della proiezione di \underline{v} su r

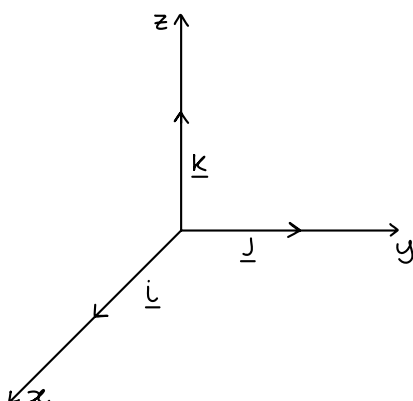


$$|\underline{e}| = 1$$

$$|\underline{p}| = |\underline{v} \cdot \underline{e}|$$

\underline{p} si dice proiezione di \underline{v} lungo la retta r , e vale $\underline{p} = (\underline{v} \cdot \underline{e})\underline{e}$.

- In termini delle componenti cartesiane



So che $|\underline{i}| = |\underline{j}| = |\underline{k}| = 1$ e

che $\underline{i} \cdot \underline{j} = \underline{i} \cdot \underline{k} = \underline{j} \cdot \underline{k} = 0$.

Scrivo, dati $\underline{v}, \underline{w}$: $\underline{v} = v_1\underline{i} + v_2\underline{j} + v_3\underline{k}$

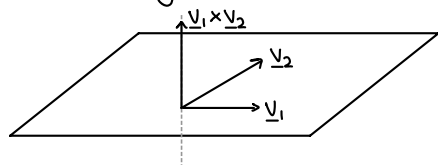
e $\underline{w} = w_1\underline{i} + w_2\underline{j} + w_3\underline{k}$.

$$\text{Vale } \underline{v} \cdot \underline{w} = (v_1\underline{i} + v_2\underline{j} + v_3\underline{k}) \cdot (w_1\underline{i} + w_2\underline{j} + w_3\underline{k}) = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$$

- Prodotto vettoriale

Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \mathbb{R}$.

- Modulo: $|\underline{v}_1 \times \underline{v}_2| = |\underline{v}_1| |\underline{v}_2| \sin \alpha$ ($\alpha \in [0; \pi]$)
- Verso: perpendicolare al piano identificato da \underline{v}_1 e \underline{v}_2
- Direzione: regola della mano destra

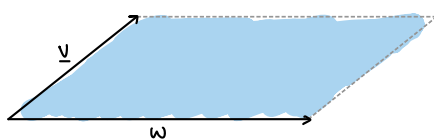


- Proprietà

- $\underline{v} \times \underline{w} = -\underline{w} \times \underline{v}$
- $\underline{u} \times (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \times \underline{v} + \underline{u} \times \underline{w}$
- $(\lambda \underline{v}) \times \underline{w} = \lambda (\underline{v} \times \underline{w})$

- $\underline{v} \times \underline{w} = 0$ se $\underline{v} \parallel \underline{w}$

- Significato geometrico



$|\underline{v} \times \underline{w}|$: Area del parallelogramma definito da \underline{v} e \underline{w} .

- o In termini delle componenti cartesiane

Scrivo, dati $\underline{v}, \underline{w}$: $\underline{v} = v_1 \underline{i} + v_2 \underline{j} + v_3 \underline{k}$ e $\underline{w} = w_1 \underline{i} + w_2 \underline{j} + w_3 \underline{k}$.

Si noti che $\underline{i} \times \underline{i} = \underline{j} \times \underline{j} = \underline{k} \times \underline{k} = 0$ e che $\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}$, $\underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}$, $\underline{j} \times \underline{k} = \underline{i}$ (e quindi $\underline{j} \times \underline{i} = -\underline{k}$, $\underline{i} \times \underline{k} = -\underline{j}$, $\underline{k} \times \underline{j} = -\underline{i}$).

Usando tali proprietà e la proprietà distributiva si ha

$$\underline{v} \times \underline{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2) \underline{i} + (v_3 w_1 - v_1 w_3) \underline{j} + (v_1 w_2 - v_2 w_1) \underline{k}$$

$$\text{Formalmente vale } \underline{v} \times \underline{w} = \det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

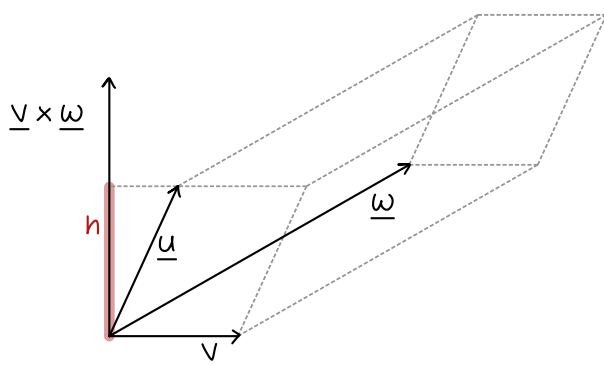
- Prodotto misto tra vettori

Siano $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$

- o Proprietà: $\underline{u} \cdot \underline{v} \times \underline{w} = \underline{w} \cdot \underline{u} \times \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{w} \times \underline{u}$

- o $\underline{u} \cdot \underline{v} \times \underline{w} = 0 \iff \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ sono complanari, ossia sono linearmente dipendenti.

- o Significato geometrico



Si considerino i vettori $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$.

Si supponga $\underline{v} \nparallel \underline{w}$, $\underline{u} \notin \pi$, essendo π il piano individuato da \underline{v} e \underline{w} .

Allora $\underline{u} \cdot \underline{v} \times \underline{w}$ è, a meno del segno, il volume del parallelepipedo individuato dai vettori.

- Vettori linearmente indipendenti

Sia V uno spazio vettoriale.

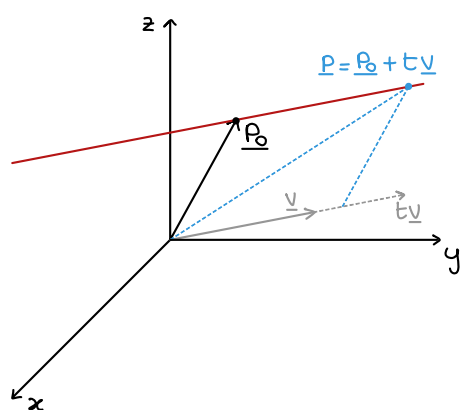
Siano $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$).

La combinazione lineare $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ con coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ è l'elemento di V dato da $\lambda_1 \underline{v}_1, \dots, \lambda_n \underline{v}_n$.

Dico che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti se $\lambda_1 \underline{v}_1, \dots, \lambda_n \underline{v}_n = 0$ implica $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

- Rette nello spazio

- o Assegnati un punto della retta e un vettore direzione



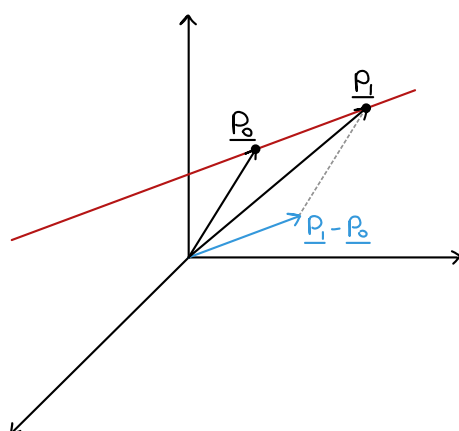
I punti \underline{p} della retta r si possono scrivere come $\underline{p} = \underline{p}_0 + t\underline{v}$, dove \underline{p}_0 è un punto fissato di r , \underline{v} è un vettore direzione (fissato) e $t \in \mathbb{R}$ è opportuno.

In componenti, se $\underline{p}_0(x_0; y_0; z_0)$, $\underline{p}(x; y; z)$, $\underline{v} = (a; b; c)$ si ha
$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Se $a, b, c \neq 0$ ricavo t da tutte le equazioni, ottenendo $t = \frac{x - x_0}{a}$, $t = \frac{y - y_0}{b}$, $t = \frac{z - z_0}{c}$.

$$\text{Quindi } \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

- Assegnati due punti della retta



Siano P_1, P_0 tali punti

Allora il vettore $\underline{v} := \underline{P_1} - \underline{P_0}$ è un vettore direzione della retta r .

Siano $P_1(x_1; y_1; z_1)$ e $P_0(x_0; y_0; z_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{v} = (x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0).$$

Le equazioni parametriche della retta

sono $\underline{P} = \underline{P_0} + t\underline{v}$, cioè

$$r: \begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + t(z_1 - z_0) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- Intersecando due piani non paralleli

La retta sarà allora identificata da un sistema del tipo $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \end{cases}$

, dove $\underline{n} := (a; b; c)$ e $\underline{n}' := (\alpha; \beta; \gamma)$ sono i vettori normali ai due piani

▲ Si noti che \underline{n} e \underline{n}' NON sono paralleli perché altrimenti i due piani o coinciderebbero, o sarebbero paralleli.

Allora $\underline{v} := \underline{n} \times \underline{n}' \neq 0$ per ipotesi è un vettore direzione della retta.

- Equazione parametrica della retta

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- Equazione cartesiana della retta: $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$

- Rette parallele

$$\text{Siano } r_0: \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \text{ e } r_1: \begin{cases} x = x_1 + sa \\ y = y_1 + sb \\ z = z_1 + sc \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$$

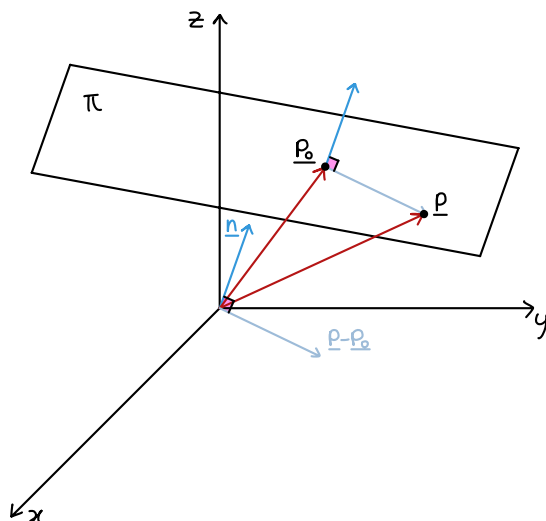
Le rette r_0 e r_1 sono parallele $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{pmatrix}$ per un opportuno $\lambda \neq 0$.

- Rette perpendicolari

Dico che due rette sono tra loro perpendicolari (o ortogonali) se, scritte le loro equazioni come $\underline{P} = \underline{P_0} + t\underline{v_0}$, $t \in \mathbb{R}$, e $\underline{P} = \underline{P_1} + s\underline{v_1}$, $s \in \mathbb{R}$, vale $\underline{v_0} \cdot \underline{v_1} = 0$.

- Piano nello spazio

- Assegnati un punto e un vettore normale al piano



Un piano può essere identificato assegnando, ad esempio, un suo punto $\underline{P_0}$.

Sia \underline{P} un punto generico di π .

Sia \underline{n} un vettore normale al piano π .

Allora vale $(\underline{P} - \underline{P_0}) \cdot \underline{n} = 0$ e, più

esattamente, essa vale $\Leftrightarrow \underline{P} \in \pi$.

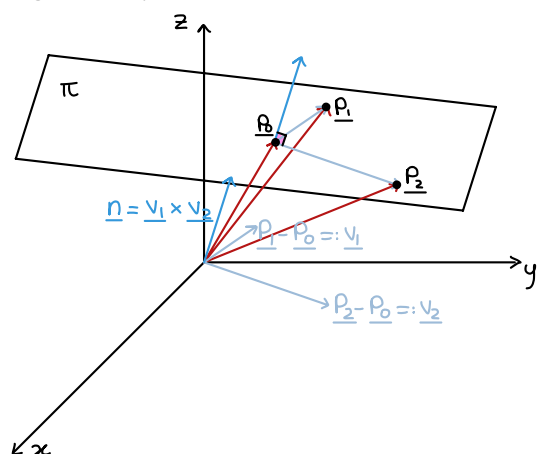
Scriviamo $\underline{P}(x; y; z)$, $\underline{P_0}(x_0; y_0; z_0)$ e $\underline{n}(a; b; c)$.

Dovrà allora valere

$$(x - x_0)a + (y - y_0)b + (z - z_0)c = 0, \text{ che si può riscrivere come } ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0 =: d.$$

Dunque l'equazione di un generico piano π è $ax+by+cz=d$,
 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e a, b, c non tutti nulli.

- Assegnati tre punti



Siano $\underline{P}_0(x_0; y_0; z_0)$, $\underline{P}_1(x_1; y_1; z_1)$
 e $\underline{P}_2(x_2; y_2; z_2)$.

Si considerino i vettori

$\underline{v}_1 = \underline{P}_1 - \underline{P}_0 = (x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0)$ e

$\underline{v}_2 = \underline{P}_2 - \underline{P}_0 = (x_2 - x_0; y_2 - y_0; z_2 - z_0)$.

Tali vettori non sono paralleli, essendo
 $\underline{P}_0, \underline{P}_1, \underline{P}_2$ non allineati, cioè non
 appartenenti alla stessa retta.

Sia allora $\underline{n} := \underline{v}_1 \times \underline{v}_2 \neq \underline{0}$, per ipotesi.

Per costruzione \underline{n} è \perp al piano
 assegnato.

Dunque ci riconduciamo al caso precedente.

- Assegnate due rette incidenti (e non coincidenti)

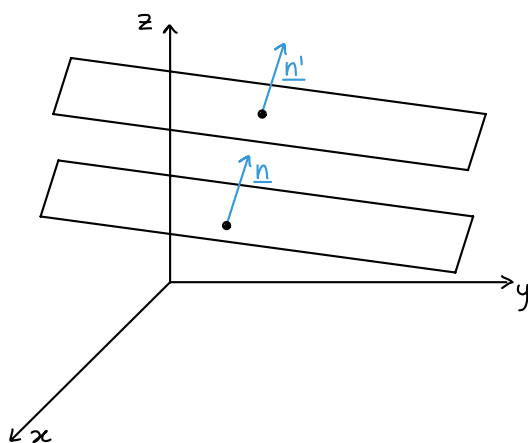
Siano $\underline{P} = \underline{P}_0 + t\underline{v}_1$ e $\underline{P} = \underline{P}_0 + s\underline{v}_2$, $t, s \in \mathbb{R}$.

Tali due rette, essendo \underline{P}_0 il punto di intersezione delle due rette.

Per ipotesi \underline{v}_1 e \underline{v}_2 non sono paralleli e, quindi, $\underline{n} = \underline{v}_1 \times \underline{v}_2 \neq \underline{0}$ ed è
 un vettore normale al piano.

Dunque ci riconduciamo al primo caso.

- Equazione cartesiana del piano:
- Piani paralleli

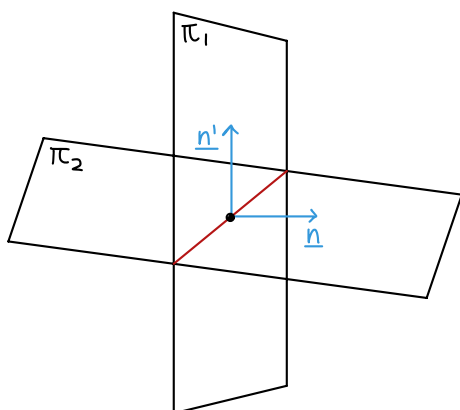


Siano assegnati due piani
 $\pi_1: ax+by+cz=d$, $\pi_2: \alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$.

Siano $\underline{n} := (a; b; c)$ e $\underline{n}' := (\alpha; \beta; \gamma)$ i
 rispettivi vettori normali.

Allora π_1 e π_2 sono paralleli $\Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0$
 $\underline{n} = \lambda \underline{n}'$, cioè $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \alpha \\ \lambda \beta \\ \lambda \gamma \end{pmatrix}$

- Piani perpendicolari

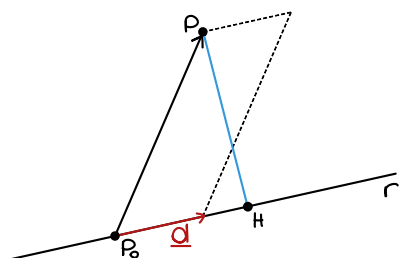


Siano assegnati due piani $\pi_1: ax+by+cz=d$,
 $\pi_2: \alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$.

Siano $\underline{n} := (a; b; c)$ e $\underline{n}' := (\alpha; \beta; \gamma)$ i rispettivi
 vettori normali.

Allora π_1 e π_2 sono perpendicolari \Leftrightarrow
 $\underline{n} \cdot \underline{n}' = 0$.

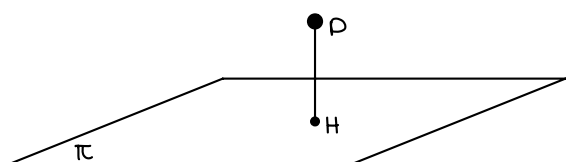
- Distanza punto-retta



$$\text{dist}(P, r) = |PH|$$

$$\text{dist}(P, r) = \frac{|\vec{PQ} \times \underline{d}|}{|\underline{d}|}$$

- Distanza punto-piano



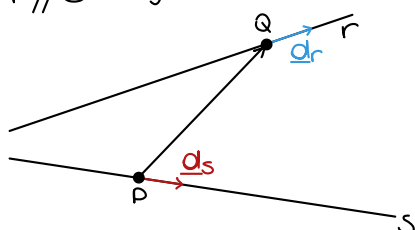
$$\pi: ax+by+cz=d$$

$$P(x_p; y_p; z_p), P \notin \pi$$

$$\text{dist}(P, \pi) = \frac{|ax_p + by_p + cz_p - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- Distanza retta-retta

$$\left. \begin{array}{l} r \cap s = \emptyset \\ r \nparallel s \end{array} \right\} \text{rette sono sghembe}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{PQ} \perp \underline{d}_r \\ \vec{PQ} \perp \underline{d}_s \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{PQ} \cdot \underline{d}_r = 0 \\ \vec{PQ} \cdot \underline{d}_s = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Determino } \vec{PQ} \perp r, \vec{PQ} \perp s.$$

$$\Rightarrow \text{dist}(r; s) = |\vec{PQ}|$$

- Spazio vettoriale

Sia V un insieme.

Dico che V è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} (rispettivamente su \mathbb{C}) se sono definitive:

- un'operazione di somma che associa a $\underline{u}, \underline{v} \in V$ un altro elemento di V , indicato con $\underline{u} + \underline{v}$.
- un'operazione di PRODOTTO (per uno scalare) che associa a $\underline{v} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ (rispettivamente $\lambda \in \mathbb{C}$) un altro elemento di V , indicato con $\lambda \underline{v}$.

o Proprietà

- $\underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) = (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} \quad \forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$
- $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u} \quad \forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$
- \exists un elemento di \mathbb{R}^n , indicato con $\underline{0} \mid \underline{v} + \underline{0} = \underline{v} \quad \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n$
- $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n \exists$ un elemento di \mathbb{R}^n , indicato con $(-\underline{v}) \mid \underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$
- $1 \cdot \underline{v} = \underline{v} \quad \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n$
- $\lambda(\mu \underline{v}) = (\lambda\mu) \underline{v} \quad \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ (oppure } \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C})$
- $\lambda(\underline{u} + \underline{v}) = \lambda \underline{u} + \lambda \underline{v} \quad \forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ (oppure } \forall \lambda \in \mathbb{C})$
- $(\lambda + \mu) \underline{v} = \lambda \underline{v} + \mu \underline{v} \quad \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ (oppure } \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C})$

- Sottospazio vettoriale

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C}).

Dico che $W \subset V$ è un sottospazio vettoriale di V se W è a sua volta uno spazio vettoriale su \mathbb{K} , cioè se $\forall \underline{v}, \underline{w} \in W, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, vale $\lambda \underline{v} + \mu \underline{w} \in W$.

- Base

Dico che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$ spazio vettoriale sono una base di V se

- $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono tra loro linearmente indipendenti.
- $\forall \underline{v} \in V \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \ (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}) / \underline{v} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n$, cioè ogni $\underline{v} \in V$ si può scrivere come combinazione lineare di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$.

- Base ortonormale

Sia V uno spazio vettoriale con prodotto scalare.

Si assuma che V ammetta una base $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$.

Dico che tale base è ortonormale se $\underline{v}_i \cdot \underline{v}_j = 0$, $\forall i \neq j$, e inoltre $|\underline{v}_i| = 1$, $\forall i$.

- Applicazioni lineari tra spazi vettoriali

Siano V_1 e V_2 spazi vettoriali sul medesimo campo $\mathbb{K} (\mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$.

Sia $L: V_1 \rightarrow V_2$.

Dico che L è lineare se vale $L(\lambda \underline{v} + \mu \underline{w}) = \lambda L(\underline{v}) + \mu L(\underline{w})$, $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V_1$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

- Matrice: collezione di numeri reali (o complessi) ordinati per righe e colonne.

Indico con M_{mn} lo spazio delle matrici con m righe e n colonne.

In generale indico con (a_{ij}) , $i=1, \dots, m$ e $j=1, \dots, n$, gli elementi di una matrice $A \in M_{mn}$.

Scriverò anche, sinteticamente, $A = (a_{ij})$.

- Algebra delle matrici

- Somma di matrici

Siano $A, B \in M_{mn}$ (matrici col medesimo numero di righe e di colonne).

Sia $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$.

Si definisce $A+B = (c_{ij})$ con $c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$, $\forall i=1, \dots, m$ e $\forall j=1, \dots, n$.

N.B. $A+B = B+A$

- Prodotto di una matrice per uno scalare

Siano $\lambda \in \mathbb{K}$ e $A \in M_{mn}$, $A = (a_{ij})$.

Si definisce $\lambda A = (d_{ij})$ con $d_{ij} = \lambda a_{ij}$, $\forall i, j$.

- Prodotto di matrici

Il prodotto di matrici è definito solo per opportune classi di matrici.

Siano $A \in M_{mn}$, $B \in M_{nk}$.

Si definisce $AB \in M_{mk}$ come segue: $AB = (c_{ij})$, $i=1, \dots, m$ e $j=1, \dots, k$,
 con $c_{ij} = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} b_{\ell j}$. ← PRODOTTO RIGHE PER COLONNE

$$\begin{matrix} \text{[} \\ \text{]} \end{matrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{23} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{33}$$

$$\text{[} \quad AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 2 & 4 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{23}$$

- Matrice identità

$$\text{Sia ora } I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_{nn}.$$

Allora vale la proprietà

$$AI_n = I_n A = A \quad \forall A \in M_{nn}$$

- Matrice trasposta

Sia $A \in M_{mn}$.

La matrice A^T (matrice trasposta di A) è la matrice dello spazio M_{nm} , ottenuta da A scambiando le righe con le colonne

In generale $(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$.

Allora valgono le proprietà:

$$\begin{cases} (AB)^T = B^T A^T & \text{se i prodotti hanno senso} \\ (A+B)^T = A^T + B^T \end{cases}$$

- Determinante di matrici quadrate

- o Caso 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det A = ad - bc$$

- o Caso 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Scelgo una riga o una colonna.

└ 3° colonna

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \det A = c \det \begin{pmatrix} a & e \\ d & h \end{pmatrix} - f \det \begin{pmatrix} a & b \\ g & h \end{pmatrix} + i \det \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} =$$
$$= c(ah - eg) - f(ah - bg) + i(ad - bc)$$

I segni sono scelti come segue: c è al posto 1,3.

Il coefficiente del termine corrispondente sarà, per definizione, $(-1)^{1+3} = (-1)^4 = 1$.

Analogamente per il termine relativo a i (posto 3,3): $(-1)^{3+3} = (-1)^6 = 1$.

└ Il termine relativo a f ha coefficiente (posto 2,3) $(-1)^{2+3} = (-1)^5 = -1$

Si procede poi RICORSIVAMENTE.

- o Caso $n \times n$

Sia $A \in M_{nn}$

1.) Il MINORE COMPLEMENTARE M_{ij} di un elemento a_{ij} è definito come il determinante della matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta CANCELLANDO da A la riga e la colonna a cui appartiene a_{ij} .

2.) Il COMPLEMENTO ALGEBRICO A_{ij} di un elemento a_{ij} è definito come

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Il DETERMINANTE di A è allora definito come segue:

└ Si fissi, ad esempio, la k -esima riga e si scriva

$$\det A := a_{k1} A_{k1} + \dots + a_{kn} A_{kn}.$$

└ Alternativamente, si fissi la h -esima ($h=1, \dots, n$) colonna e si scriva

$$\det A := a_{1h} A_{1h} + \dots + a_{nh} A_{nh}.$$

- Rango

Sia $A \in M_{mn}$ e sia $k \leq \min(m, n)$.

Si dice minore di ordine k estratto da A il determinante di qualsiasi sottomatrice $k \times k$ estratta da A .

Si definisce poi il RANGO (o caratteristica) di A , indicato con rka , l'intero $r \mid \exists$ un minore di ordine r NON NULO e ogni minore di ordine $r+1$ È NULO.

- Matrice inversa

Sia $A \in M_{nn}$.

Mi chiedo se $\exists B \in M_{nn} \mid AB = BA = I_n$.

Se una tale matrice esiste, essa verrà detta MATRICE INVERSA di A .

- Teorema

- o Ipotesi: Sia $A \in M_{nn}$.

- o Tesi: A ammette inversa $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.
In tal caso la matrice inversa, indicata con A^{-1} , è data da: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A_{ij})^T$, dove A_{ij} sono i complementi algebrici degli elementi a_{ij} di A .

- o Dimostrazione

Supponiamo che \exists l'inversa di A .

Mostro allora che $\det A \neq 0$.

Infatti da $I_n = AA^{-1}$ ottengo $1 = \det(I_n) = \det(AA^{-1}) \stackrel{\text{TEOREMA DI BINET}}{=} \det A \cdot \det(A^{-1})$

E dunque, in particolare, $\det A \neq 0$.

Viceversa, si assuma $\det A \neq 0$.

Verifico che la matrice indicata nell'enunciato è effettivamente l'inversa di A (verifico in realtà solo che $AA^{-1} = I_n$, la verifica che $A^{-1}A = I_n$ è analoga).

Sia allora A^{-1} la matrice indicata nell'enunciato e sia b_{ki} l'elemento di posto k, i del prodotto AA^{-1} .

$$\text{Vale } b_{ki} := (AA^{-1})_{ki} = \sum_{j=1}^n a_{kj} (A^{-1})_{ji} = \sum_{j=1}^n a_{kj} \frac{A_{ji}}{\det A} \quad \text{TRASPORRE}$$

$$\text{Cioè } b_{ki} = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^n a_{kj} A_{ji}$$

Sia $k=i$.

$$\text{Vale } b_{kk} = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^n a_{kj} A_{kj} = 1 \quad \forall k$$

Sia infine $k \neq i$.

Sia poi A' la matrice ottenuta da A sostituendo alla i -esima riga una copia della k -esima riga.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Per le proprietà del determinante, $\det A' = 0$.

Siano a'_{ij} gli elementi di A' .

Sviluppando $\det A'$ lungo la i -esima riga (che è uguale alla k -esima riga di A) si ha:

$$0 = \det A' = a'_{i1} A_{i1} + \dots + a'_{in} A_{in} = a_{k1} A_{i1} + \dots + a_{kn} A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{kj} A_{ij} = (\det A) b_{ki}$$

Ma $\det A \neq 0$, quindi $b_{ki} = 0 \quad \forall k \neq i$.

Quindi $b_{kk} = 1 \quad \forall k$, $b_{ki} = 0 \quad \forall k, i$, con $k \neq i$.

Quindi $AA^{-1} = I_n$.

Teorema di rappresentazione

- o Ipotesi

- Siano V_n, V_m spazi vettoriali con dimensioni n, m rispettivamente sullo stesso campo \mathbb{K} (\mathbb{R} o \mathbb{C}).
- Sia $L: V_n \rightarrow V_m$ un'applicazione lineare.
- Siano fissate due BASI $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ di V_n e $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ di V_m .
- Sia $\underline{u} \in V_n$ e si scriva $\underline{u} = x_1 \underline{u}_1 + \dots + x_n \underline{u}_n$ con $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$.
- $L(\underline{u}) = y_1 \underline{v}_1 + \dots + y_m \underline{v}_m$ con $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{K}$.

- o Tesi: Allora $\exists!$ (una e una sola) matrice $A \in M_{m,n}$ che rappresenta L nel senso seguente:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}_{\in \mathbb{K}^m} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\in \mathbb{K}^n}$$

o Dimostrazione

Osservo che $L(\underline{u}_1), \dots, L(\underline{u}_n) \in V_n$.

Dunque si può scrivere: $L(\underline{u}_1) = a_{11}\underline{v}_1 + \dots + a_{m1}\underline{v}_m$

$$L(\underline{u}_2) = a_{12}\underline{v}_1 + \dots + a_{m2}\underline{v}_m$$

$$\vdots$$

$$L(\underline{u}_n) = a_{1n}\underline{v}_1 + \dots + a_{mn}\underline{v}_m$$

per opportuni coefficienti a_{ij} , $i=1, \dots, m$ e $j=1, \dots, n$.

Pongo $A := (a_{ij})$, $i=1, \dots, m$ e $j=1, \dots, n$, $A \in M_{mn}$.

Scrivo allora, posto come nell'enunciato, $\underline{u} = x_1\underline{u}_1 + \dots + x_n\underline{u}_n$:

$$L(\underline{u}) = L\left(\sum_{j=1}^n x_j \underline{u}_j\right) \stackrel{\text{LINEARITÀ DI } L}{=} \sum_{j=1}^n x_j L(\underline{u}_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \underline{v}_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \underline{v}_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right) \underline{v}_i.$$

$$\text{Cioè } L(\underline{u}) = \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right] \underline{v}_i = \sum_{i=1}^m y_i \underline{v}_i, \text{ dove } y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \forall i=1, \dots, m.$$

Dunque le componenti $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ di $L(\underline{u})$ nella base $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ di V_m si scrivono,

in termini delle componenti $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ di \underline{u} nella base $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ nella forma

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ con } A = (a_{ij}).$$

Dunque una matrice $A \in M_{mn}$ con le proprietà enunciate \exists .

Tale matrice è UNICA perché sono uniche le componenti di un qualsiasi fissato vettore in una base assegnata, e le righe di A sono per costruzione le componenti di $L(\underline{u}_1), \dots, L(\underline{u}_n)$ nella base $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$.

• Sistema lineare

Un sistema di m equazioni in n incognite del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

con incognite x_1, \dots, x_n , coefficienti (a_{ij}) ($i=1, \dots, m$ e $j=1, \dots, n$) e termini noti b_1, \dots, b_m , viene detto lineare (non omogeneo se i b_i non sono tutti nulli, omogeneo se $b_i = 0 \forall i$).

- Sistema lineare: Posti $A := (a_{ij})$, $i=1, \dots, m$ e $j=1, \dots, n$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ e $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, il sistema si riscrive $A\underline{x} = \underline{b}$.

• Teorema di Cramer

o Ipotesi

- Sia $A \in M_{nn}$.
- Si assuma $\det A \neq 0$.
- Sia $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$.

o Tesi

- Allora il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ ha ! soluzione \underline{x} data da $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$.

- Posto $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, vale la seguente formula: $x_i = \frac{\det B_i}{\det A}$,

dove $B_i := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, dove $A = (a_{ij})$ e $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

i-esima colonna

- o Dimostrazione

Essendo $\det A \neq 0$ per ipotesi $\Rightarrow A$ è invertibile, dunque $A^{-1} \exists$.

Ma allora, da $A \times \underline{x} = \underline{b}$ segue: $\underline{x} = (A^{-1} A) \underline{x} = A^{-1} (A \underline{x}) = A^{-1} \underline{b}$.

Cioè $\underline{x} = A^{-1} \underline{b}$.

Inoltre, noto che effettivamente tale vettore risolve il sistema, infatti se $\underline{x} := A^{-1} \underline{b}$, allora $A \underline{x} = A(A^{-1} \underline{b}) = I_n \underline{b} = \underline{b}$.

Dunque la soluzione \exists (ed è $\underline{x} = A^{-1} \underline{b}$, dunque è unica).

Riguardo alla seconda parte, vale $x_i = (A^{-1} \underline{b})_i = \sum_{j=1}^n (A^{-1})_{ij} \cdot b_j =$

$$= \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^n A_{ji} b_j = \frac{\det B_i}{\det A} \quad \text{in quanto } \det B_i = \sum_{j=1}^n A_{ji} b_j, \text{ come si vede}$$

sviluppando lungo la i -esima colonna di B_i e notando che i complementi algebrici relativi a tale colonna coincidono con quelli della matrice A (la i -esima colonna si CANCELLA nel calcolo di tali complementi algebrici).

Teorema di Rouché-Capelli

- o Ipotesi: Sia $A \in M_{mn}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$.

- o Tesi: Il sistema $A \underline{x} = \underline{b}$ ammette soluzioni $\Leftrightarrow \text{rk}(A) = \text{rk}(A/\underline{b})$

- Nucleo e immagine di un'applicazione lineare

Sia $L: V_n \rightarrow V_m$ ($\dim V_n = n$, $\dim V_m = m$) LINEARE.

Si definiscono

$$\begin{cases} \text{l'immagine di } L: & \text{Im}(L) := \{ \underline{v} \in V_m, \exists \underline{u} \in V_n \text{ con } L(\underline{u}) = \underline{v} \}, \text{Im}(L) \subset V_m \\ \text{il nucleo di } L: & \text{Ker}(L) := \{ \underline{u} \in V_n, L(\underline{u}) = \underline{0} \}, \text{Ker}(L) \subset V_n \end{cases}$$

Teorema di nullità più rango

- o Ipotesi: Sia $L: V_n \rightarrow V_m$ ($\dim V_n = n$, $\dim V_m = m$) lineare.

- o Tesi: Allora $\dim[\text{Im}(L)] + \dim[\text{Ker}(L)] = n$
 $\quad \quad \quad = \text{rk}(A)$

$$\Rightarrow \dim[\text{Ker}(L)] = n - \text{rk}(A) \quad \text{CALCOLABILE}, \text{ dove } A \text{ è una matrice rappresentativa di } L.$$

Ma $\text{Ker}(L)$ è in corrispondenza biunivoca con lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $A \underline{x} = \underline{0}$.

Ma allora $\dim(\text{spazio delle soluzioni di } A \underline{x} = \underline{0}) = n - \text{rk} A$.

- o Dimostrazione

Sia $k := \dim[\text{Ker}(L)]$.

Suppongo $k \neq 0$, $k \neq n$.

Sia in tal caso $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k$ una base di $\text{Ker}(L)$.

Siano poi $\underline{u}_{k+1}, \dots, \underline{u}_n$ ulteriori vettori di V_n / $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k, \underline{u}_{k+1}, \dots, \underline{u}_n$ n vettori siano una base di V_n .

Allora se $\underline{v} \in V_n \exists x_1, \dots, x_n$ / $\underline{v} = x_1 \underline{w}_1 + \dots + x_k \underline{w}_k + x_{k+1} \underline{u}_{k+1} + \dots + x_n \underline{u}_n$.

$$\begin{aligned} \text{Ma allora } L(\underline{v}) &= L(x_1 \underline{w}_1 + \dots + x_k \underline{w}_k + x_{k+1} \underline{u}_{k+1} + \dots + x_n \underline{u}_n) = \\ &= x_1 L(\underline{w}_1) + \dots + x_k L(\underline{w}_k) + x_{k+1} L(\underline{u}_{k+1}) + \dots + x_n L(\underline{u}_n) = \\ &= \underline{0} + \dots + \underline{0} + x_{k+1} L(\underline{u}_{k+1}) + \dots + x_n L(\underline{u}_n) \end{aligned}$$

Cioè ogni vettore $L(\underline{v})$, ovvero ogni elemento di $\text{Im}(L)$, si può scrivere come COMBINAZIONE LINEARE di $L(\underline{u}_{k+1}), \dots, L(\underline{u}_n)$.

Quindi $\dim[\text{Im}(L)] \leq n - k$.

Vale l'uguale se dimostro che $L(\underline{u}_{k+1}), \dots, L(\underline{u}_n)$ sono vettori tra loro INDIPENDENTI. Procedo per assurdo.

Se non lo fossero, $\exists c_{k+1}, \dots, c_n$ NON TUTTI NULLI / $\underline{0} = c_{k+1} L(\underline{u}_{k+1}) + \dots + c_n L(\underline{u}_n) =$

$$= L(c_{k+1}\underline{u}_{k+1} + \dots + c_n\underline{u}_n) \quad , \text{cioè } c_{k+1}\underline{u}_{k+1} + \dots + c_n\underline{u}_n \in \text{Ker}(L).$$

Ciò è assurdo.

Infatti gli $\underline{u}_{k+1}, \dots, \underline{u}_n$ sono per costruzione indipendenti dai $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k$,
BASE per il nucleo.

Quindi $L(\underline{u}_{k+1}), \dots, L(\underline{u}_n)$ sono tra loro indipendenti e dunque vale

$$\dim[\text{Im}(L)] = n - k = n - \dim[\text{Ker}(L)].$$

- Applicazioni lineari iniettive

Sia $L: V_n \rightarrow V_m$ lineare.

Dico che **L è INIETTIVA se $\text{Ker}(L) = \{\underline{0}\}$**

Sia $\underline{w} \in V_m$ e si supponga che \exists due soluzioni $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ del problema $L(\underline{v}) = \underline{w}$.

Allora $L(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = L(\underline{v}_1) - L(\underline{v}_2) = \underline{w} - \underline{w} = \underline{0}$, cioè $\underline{v}_1 - \underline{v}_2 \in \text{Ker}(L)$.

Ma allora per ipotesi $\underline{v}_1 - \underline{v}_2 = \underline{0}$, cioè $\underline{v}_1 = \underline{v}_2$.

Ciò è se il problema $L(\underline{v}) = \underline{w}$ ha soluzione, essa è univoca $\forall \underline{w} \in V_m$.

- Applicazioni lineari suriettive

Sia $L: V_n \rightarrow V_m$ lineare.

Dico che **L è SURIETTIVA se $\text{Im}(L) = V_m$** .

- Applicazioni lineari biunivoche

Sia $L: V_n \rightarrow V_m$ lineare.

Dico che L è BIETTIVA (o INVERTIBILE) , se essa è iniettiva e suriettiva.

- Matrice diagonalizzabile

Dico che $A \in M_{nn}$ ha elementi in \mathbb{K} è diagonalizzabile su \mathbb{K} se

$\exists \Lambda, S \in M_{nn}$ (Λ, S a elementi in \mathbb{K}) con Λ diagonale,

S invertibile / $S^{-1}AS = \Lambda$.

- Autovalori e autovettori di una matrice quadrata

Sia $A \in M_{nn}$ e siano $\lambda \in \mathbb{C}$, $\underline{v} \in \mathbb{C}$, $\underline{v} \neq \underline{0}$.

Dico che \underline{v} è un autovettore di A relativo all'autovalore λ se vale **$A\underline{v} = \lambda\underline{v}$** .

- Condizione di diagonalizzabilità in termini di autovettori

- Ipotesi

- Sia $A \in M_{nn}$.

- A è diagonalizzabile su $\mathbb{K} \Leftrightarrow \mathbb{K}^n$ possiede una base di autovettori di A .

In tal caso si indichino con $\underline{h}_1, \dots, \underline{h}_n$ (vettori colonna) gli elementi di tale base
e con $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ i corrispondenti autovalori (non necessariamente
distinti).

- Siano infine $S := (\underline{h}_1, \dots, \underline{h}_n)$, $\Lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

- Tesi: Allora vale $S^{-1}AS = \Lambda$.

- Dimostrazione

Ricordo che A è diagonalizzabile su $\mathbb{K} \Leftrightarrow \exists S$ invertibile , Λ diagonale a
elementi in \mathbb{K} / $S^{-1}AS = \Lambda$.

Ciò accade $\Leftrightarrow AS = S\Lambda$ (moltiplicare $S^{-1}AS = \Lambda$ a sinistra per la matrice
invertibile S).

Sia $S = (\underline{h}_1, \dots, \underline{h}_n)$.

Allora è facile vedere che $AS = (A\underline{h}_1, \dots, A\underline{h}_n)$.

Inoltre vale che $S\Lambda = (\lambda_1\underline{h}_1, \dots, \lambda_n\underline{h}_n)$.

Quindi A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow AS = S\Lambda \Leftrightarrow A\underline{h}_1 = \lambda_1\underline{h}_1, \dots, A\underline{h}_n = \lambda_n\underline{h}_n$,
cioè $\Leftrightarrow \underline{h}_1, \dots, \underline{h}_n$ sono autovettori relativi agli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Si noti che , se A è diagonalizzabile su \mathbb{K} , la matrice S soddisfa

$\det S \neq 0$.

Dunque $\underline{h}_1, \dots, \underline{h}_n$ sono INDIPENDENTI e vi è quindi una BASE DI AUTOVETTORI.

Viceversa, se vi è una base $\underline{h}_1, \dots, \underline{h}_n$ di autovettori, allora $S := (\underline{h}_1, \dots, \underline{h}_n)$ soddisfa $\det S \neq 0$, ossia S è invertibile.

- **Molteplicità algebrica**

Sia $A \in M_{nn}$ e sia $P_n(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$ il suo polinomio caratteristico.

Sia λ_0 un autovalore di A .

Dico che λ_0 ha MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA pari a $k \in \mathbb{N}$ se λ_0 è una radice di P_n di ordine k , cioè se $P_n(\lambda)$ è divisibile per $(\lambda - \lambda_0)^k$, ma non per $(\lambda - \lambda_0)^{k+1}$.

- **Molteplicità geometrica**

Sia $A \in M_{nn}$ e sia λ_0 un autovalore di A .

La MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA di λ_0 è definita come la DIMENSIONE dell'AUTOSPAZIO relativo a λ_0 , cioè come $\dim(\text{Ker}(A - \lambda_0 I_n))$.

- **Matrici simmetriche**

Sia $A \in M_{nn}$.

Dico che A è SIMMETRICA se vale $A^T = A$.

- **Matrici ortogonali**

Sia $A \in M_{nn}$ a elementi REALI.

Dico che A è ORTOGONALE se vale $AA^T = A^T A = I_n$.

- **Teorema spettrale**

Sia $A \in M_{nn}$ SIMMETRICA e REALE.

Allora A è diagonalizzabile su \mathbb{R} con matrice di passaggio ORTOGONALE.

In particolare \exists una base ORTONORMALE di autovettori di A .